МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

геолого-геофизический факультет

В. Г. КОЛМОГОРОВ

ОСНОВЫ ГЕОДЕЗИИ И ТОПОГРАФИИ

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК
2004

ББК Д 12 я 73-1
УДК 528.4
К 608

Колмогоров В.Г. Основы геодезии и топографии: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2004. 151 с.

Настоящее учебное пособие состоит из предисловия и пяти разделов.

В первом разделе формулируются предмет и задачи геодезии, даются общие сведения о форме и размерах Земли, об элементах измерений на земной поверхности и определении положения точек земной поверхности.

Четыре следующих раздела содержат в себе основные понятия о плане, карте, профиле, картографических проекциях и номенклатуре топографических карт, кратко описываются методы работы с картой; излагаются основы теории ошибок, освещаются общие сведения о топографических съемках (методах создания съемочного обоснования проложением теодолитных и нивелирных ходов, знакомство с геодезическими инструментами технической точности, способами измерения геодезических элементов и вычислительной обработки результатов измерений) и дистанционных методах изучения земной поверхности (аэрофотограмметрической и космической съемками).

Учебное пособие «Основы геодезии и топографии» может быть рекомендовано студентам вузов, для которых предмет «геодезия» является общеобразовательным (экономика и управление производством, геология и геофизика, геоэкология, география и др.).

Рецензенты:

профессор кафедры геофизики ГГФ НГУ А. В. Ладынин,
доцент каф. геодезии СГГА Н. М. Пешков

© Новосибирский государственный университет, 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 6

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОДЕЗИИ 8
1.1. Предмет и задачи геодезии 8
1.2. Понятие о форме и размерах Земли 11
1.3. Элементы измерений на земной поверхости 14
1.4. Определение точек земной поверхности 16

2. ПЛАН И КАРТА 19
2.1. Изображение земной поверхности на плоскости 19
2.2. Понятие о плане, профиле, карте 21
2.3. Масштабы 22
2.4. Понятие о картографических проекциях 25
2.4.1. Конформная проекция Гаусса 26
2.5. Номенклатура карт 30
2.6. Изображение рельефа на планах и картах 34
2.7. Ориентирование линий на местности 38
2.8. Сближение меридианов. Переход от азимута к дирекционному углу 41
2.9. Определение площадей 43
2.9.1. Геометрический способ 43
2.9.2. Аналитический способ 45
2.9.3. Механический способ 46
2.9.4. Редуцирование площадей 53

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ 55
3.1. Измерения величин 55
3.2. Ошибки измерений и их виды 56
3.3. Арифметическая средина и ее свойства 59
3.4. Средняя квадратическая ошибка 60
3.5. Средние квадратические ошибки функций измеренных величин 61
3.6. Средняя квадратическая ошибка арифметической средины 65
3.7. Вероятнейшие поправки и их свойства 66

3.8. Выражение средней квадратической ошибки через вероятнейшие поправки 66
3.9. Определение средней квадратической ошибки одного измерения по разностям двойных равноточных измерений 68
3.10. Оценка точости неравноточных измерений 70
3.11. Примеры практического использования теории ошибок 74
3..11.1. Точность положения контурных точек на планах (картах) 74
3.11.2. Точность изображения линий на плане 74
3.11.3. Точность направлений и углов, изображенных на плане (карте) 76
3.11.4. Точность площадей контуров, изображенных на плане (карте) 77
3.11.5. Точность вычисления площади аналитическим способом 79
3.11.6. Оценка точности угловых измерений 80

4. ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ СЪЕМКИ 82
4.1. Общие сведения о топографических съемках 82
4.2. Сущность теодолитной съемки 85
4.2.1. Обозначение точек на местности 86
4.2.2. Измерение длин сторон теодолитного хода мерной лентой 87
4.2.3. Конструктивные элементы технических теодолитов 91
4.2.4. Поверки теодолита 101
4.2.5. Измерение горизонтальных и вертикальных углов 105
4.2.6. Математическая обработка теодолитного хода 108
4.3. Измерение превышений 114
4.3.1. Геометрическое нивелирование 115
4.3.2. Тригонометрическое нивелирование 123
4.3.3. Понятие о барометрическом нивелировании 124
4.3.4. Понятие о гидростатическом нивелировании 125
4.4. Тахеометрическая съемка 126
4.5. Составление плана участка местности 129
4.6. Мензульная съемка 131

5. ДИСТАНЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ 135
5.1. Аэрофотосъемка 135
5.1.1. Аэрофотоснимок 137

5.1.2. Аэрофототопографическая съемка 139
5.2. Космическая съемка 140
5.2.1. Предмет и задачи спутниковой геодезии 141
5.2.2. Техника и методы наблюдений искссственных спутников 142
5.2.3. Идея решения геометрических задач спутниковой геодезии 143
5.2.4. Построение новой геодезической основы 145

ПРИЛОЖЕНИЕ 147

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 151

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Основы геодезии и торографии» составлено на основе курса лекций «Основы геодезии и топографии», прочитанных студентам геолого-геофизического факультета Новосибирского государственного университета.

Цели и задачи учебного пособия следующие:

а) студенты изучают основные понятия, термины и определения геодезии, фигуру Земли, системы координат, карты и планы, утройство геодезических приборов, производство геодезических измерений и их обработку, способы создания съемочого обоснования и технологию наземных съемок;

б) после изучения учебного пособия студенты должны знать топографическую карту и уметь решать по ней технические задачи, уметь выполнять поверки, исследования и юстировку гнодезических приборов, знать теорию и методы математической обработки результатов геодезических измерений с оценкой их точности, знать основные методы топографических съемок и уметь выполнять их на местности и вычерчивать план местности.

Настоящее пособие состоит из пяти разделов.

В первом разделе «Общие сведения о геодезии» формулируются предмет и задачи геодезии, даются общие сведения о форме и размерах Земли, об элементах измерений на земной поверхности и определении положения точек земной поверхности.

Второй раздел «План и карта» содержит в себе основные понятия о плане, карте, профиле, картографических проекциях и номенклатуре топографических карт. Здесь же кратко описываются методы работы с картой: измерение линий, направлений, углов между направлениями, площадей, измерение высот точек земной поверхности, определение крутизны склонов.

В третьем разделе «Основы теории ошибок измерений» даются понятия об измерениях величин и видах их ошибок, о свойствах арифметической средины и вероятнейших поправок, оценке точности ряда равноточных измерений одной величины и по разностям двойных измерений ряда однородных величин.

В четвертом разделе «Топографические съемки» освещены общие сведения о топографических съемках и методах создания

съемочного обоснования проложением теодолитных и нивелирных ходов, знакомство с теодолитом и нивелиром, способами измерения расстояний, углов (горизонтальных и вертикальных) и превышений, математическая обработка результатов измерений, выполнение тахеометрической съемки и составление плана местности.

Последний раздел «Дистанционные методы изучения земной поверхости» в общих чертах знакомит читателя с методами аэрофотограмметрической и космической съемок.

Учитывая дефицит в учебниках по геодезии, учебное пособие «Основы геодезии и топографии» может быть рекомендовано студентам специальностей, для которых предмет «геодезия» является общеобразовательной дисциплиной (геофизики, геологи, географы, экологи и др.).

Автор считает своим долгом отметить ценные замечания и предложения рецензентов и выражает им искреннюю благодарность.

В. Г. Колмогоров

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОДЕЗИИ

1.1. Предмет и задачи геодезии

Геодезия – это наука об измерениях на земной поверхности. Эти измерения дают возможность определить форму и размеры Земли, а также изобразить отдельные ее участки на бумаге в виде топографических карт и планов.

Как наука геодезия возникла в глубокой древности и развивалась с ростом потребности человека в хозяйстве: деление земельных участков, строительство оросительных каналов, дорог, мостов, тоннелей, изучение водного режима крупных бассейнов, природных богатств и т.д.

Для проведения каких-либо работ на местности в первую очередь необходимо изучить ее поверхность, для чего производятся на этой поверхности измерения, их математическая обработка и составление планов, карт, профилей, которые являются конечной продукцией геодезического производства. Таким образом, основной задачей геодезии является изучение следующих методов:

− измерение линий и углов на поверхности, над поверхностью (аэрофотосъемка, космическая съемка), под поверхностью (в шахтах, тоннелях, подземных галлереях и т.п.); математическая обработка и анализ этих измерений;

− графическое построение и оформление карт, планов, профилей.

Карты, планы, профили необходимы для решения различных задач в народном хозяйстве: в землеустройстве, строительстве жилых и промышленных объектов, при изыскании и строительстве дорог, водохранилищ и хранилищ природных полезных ископаемых и пр. Горное дело требует наличия точных топографических планов, чтобы вести подземные работы по заранее намеченному плану. Большое значение геодезия имеет в обороне страны для решения артиллерийских, военно-инженерных других задач. Говорят, что “карта – глаза армии”.

Вследствие многочисленных задач, которые призвана решать геодезия, в настоящее время она делится на несколько научных дисциплин, каждая из которых занимается решением сравнительно небольшого числа вопросов. Так, разработка методов определения

размеров и фигуры Земли, изучение горизонтальных и вертикальных движений земной коры составляют проедмет *высшей геодезии*. Изучением методов изображения сравнительно небольших участков земной поверхности на плоскости занимается *геодезия* или *топография*. Разработка теории и способов изображения на плоскости значительных участков Земли или всей планеты в целом является основной целью *картографии*. *Фототопография* и *аэрофототопография* занимаются разработкой методов создания планов и карт по фотоснимкам и аэрофотоснимкам местности. Техническая дисциплина, имеющая своей задачей определение вида и размеров какого-либо объекта путем изучения и измерения не самого объекта, а его фотографического изображения называется *фотограмметрией* (измерительной фотографией). Наибольшее применение фотограмметрия получила в топографии, где объектом изучения и измерения является местность. *Прикладная* (*инженерная*) *геодезия* занимается изучением методов геодезических работ, выполняемых при изысканиях, строительстве и эксплуатации инженерных сооружений, включая наблюдения за осадками и деформациями последних.

Содержание геодезии за последние годы значительно расширилось в связи с запуском искусственных спутников Земли (ИСЗ) и космических ракет. Появился новый раздел геодезии - *космическая и спутниковая геодезия*, в котором изучаются вопросы использования наблюдений космических объектов, искусственных и естественных спутников Земли для решения научных и научно-технических задач геодезии. Весьма важны результаты, полученные методами космической геодезии для решения задач геофизики и, прежде всего, задач геодинамики. Повышение точности измерений в космической геодезии и совершенствование методов их математической обработки позволяют получить количественные данные об эволюции фигуры и гравитационного поля Земли во времени. Это позволяет установить характер и особенности движения материков, закономерности протекания тектонических процессов, получить данные для прогноза, поиска полезных ископаемых и эффективного предсказания сейсмических процессов, в том числе сильных землетрясений.

Актуальной проблемой при выполнении космических и аэрофотограмметрических съемок является автоматизированное

получение точной навигационно-геодезической информации для проложения равномерной сети съемочных маршрутов и привязка точек маршрутов в моменты измерения параметров геофизических полей.

Из-за многообразия геофизических методов разведки полезных ископаемых вследствие большого диапазона требований, предъявляемых к точности определения координат и высот пунктов съемочной сети, при создании последних используется большое количество геодезических средств, способов, приемов. Особенно велики объемы геодезических работ при наземных геолого-геофизических съемках. Общая протяженность высотно-теодолитных ходов, прокладываемых ежегодно (до 1991 года) организациями Мингео СССР, составляла более 1 миллиона км, при этом одних только просек прорубалось более 200 тысяч километров.

Потребность народного хозяйства в топографо-геодезических и картографических материалах должна определяться на основе анализа топографо-геодезической обеспеченности территории, постановлений правительства, заявок министерств и ведомств, а также исходя из научных и важнейших народнохозяйственных задач. Проведение топографо-геодезических и картографических работ необходимо в первую очередь на территории Западной и Восточной Сибири, Прикаспийской низменности, Европейского Севера и Дальнего Востока с целью обеспечения их данными для проведения разведки нефти, газа, угля, а также работ по созданию топливно-энергетических комплексов.

Как инженерная наука геодезия тесно связана с математикой, астрономией, физикой, геофизикой и геологией, географией, геоморфологией, почвоведением, землеустроительным и дорожным проектированием, горным делом и др.. В чем заключается эта связь, видно из следующих приведенных ниже примеров.

1. Определение положения точек земной поверхности из наблюдений небесных светил (астрономических измерений).

2. Проектирование и подсчет объема земляных работ при строительстве инженерных сооружений (на топопланах и профилях)

3. Составление специальных (тематических) карт − геологических, тектонических, геофизических, метеорологических и синоптических, учебных и др.

4. Крупномасштабные ведомственные съемки и производство геодезических работ ведомствами (например, при изучении деформаций инженерных сооружений при их эксплуатации, кадастровые съемки и др.).

1.2. Понятие о форме и размерах Земли

При решении ряда геодезических задач необходимо знать с высокой степенью надежости форму и размеры Земли.

Первое определение размеров Земли выполнил греческий ученый Эратосфен, живший в III в. до н.э. Его идея градусных измерений проста и заключается в следующем.

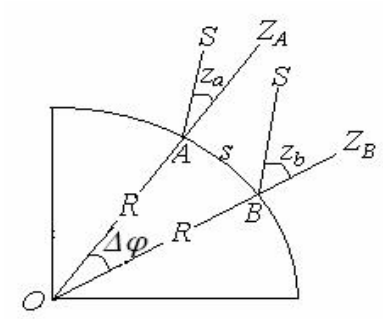


Рис. 1

На дуге меридиана выбираются две точки A и B (рис. 1), расположенные друг от друга на известном расстоянии s. Выбранное в меридиональной плоскости светило S находится практически в бесконечности, вследствие чего $AS \parallel BS$. Измеренными величинами являются длина дуги $AB = s$ и зенитные расстояния $SAZ_A = Za$ и $SBZ_B = z_b$; искомая величина − радиус Земли R.

Как видно из рис. 1, центральный угол $\Delta\varphi = z_b - z_a$, откуда $R = s/\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ выражено в радианной мере. В результате наблюдений и расчетов Эратосфен получил R = 6311 км.

Вместо измерения углов z_a и z_b можно астрономическим путем определять широты φ_A и φ_B в точках A и B, а затем $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$.

Последующие градусные измерения показали, что равным дугам на земной поверхности соответствуют неравные центральные углы, при этом углы, опирающиеся на равные дуги, увеличиваются от экватора к полюсам, то есть поверхность сплюснута у полюсов вследствие вращения Земли вокруг своей оси. Из-за неравномерного размещения масс в теле Земли эта

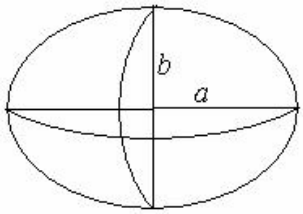


Рис. 2

поверхность имеет очень сложную форму, которую невозможно выразить простой математической формулой.

Поскольку Земля не является правильным геометрическим телом, то в геодезии введено понятие уровенной поверхности, которую можно представить как поверхность воды океана в спокойном состоянии, мысленно проложенную под сушей. Эта уровенная поверхность называется поверхностью геоида. Уровенная поверхность обладает следующим свойством: она является выпуклой поверхностью, перпендикулярной к направлению силы тяжести (отвесной линии) в каждой своей точке. Поверхность, обладающую таким свойством, можно провести через любую точку отвесной линии и эта поверхность называется уровенной поверхностью этой точки.

В геодезии вместо фигуры геоида принимают близкую к ней фигуру эллипсоида вращения (сфероида), получающегося от вращения эллипса вокруг его малой оси (рис. 2).

На протяжении двух последних столетий ученые неоднократно определяли размеры земного эллипсоида (таблица 1). Результаты, полученные Деламбром, имеют историческое значение: одна десятимиллионная часть четверти меридиана Деламбра (парижского) принята в качестве единицы измерения метрической системы − *метр* (расстояние между поперечными штрихами на метре-прототипе № 6 при 0^0С, хранящемся в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа). Государственным эталоном метра в России является платиново-иридиевый метр-прототип № 28, изготовленный в одной серии с метром-прототипом № 6.

В 1927 г. Генеральной конференцией по мерам и весам принято: один метр равен 1553164λ, где λ – длина световой волны линии кадмия. В 1960 г. на XI Генеральной конференции по мерам и весам было принято, что в длине волн в вакууме излучения, соотвествующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86 (оранжевая линия в спектре изотопа криптона-86), метр равен 1 650 763,73λ.

Результатами, полученными Бесселем, пользовались в России, а затем в СССР до 1946 г. В 1940 г. советскими геодезистами под

руководством проф. Ф. Н. Красовского и при ближайшем участии проф. А. А. Изотова на основе большого геодезического материала получены наиболее достоверные размеры земного эллипсоида, принятые для геодезических работ в СССР по постановлению СМ СССР от 7 мая 1946 г.

Таблица 1

Размеры земного эллипсоида

Исследователи	Год	Размеры полуосей в метрах		Сжатие $\alpha = (a-b)/a$
		большой a	малой b	
Деламбр	1800	6 375 653	6 356 564	1 : 334.0
Вальбек	1819	6 376 896	6 355 833	1 : 302.8
Бессель	1841	6 377 397	6 356 079	1 : 299.2
Кларк	1880	6 378 249	6 356 515	1 : 293.5
Хейфорд	1909	6 378 388	6 356 912	1 : 297.0
Красовский	1940 ..	6 378 245	6 356 863	1 : 298.3

Но, пользуясь земным сфероидом для определения формы и размеров Земли, мало знать только его размеры: необходимо его правильно ориентировать в теле Земли с соблюдением возможно большей близости поверности сфероида к поверхности геоида. Сфероид, ориентированный определенным образом в теле геоида, называется референц–эллипсоидом. Для каждого большого государства (или группы стран, меньших по площади) существует свой референц-эллипсоид.

В 1960 г. проф. И. Д. Жонголович по результатам наблюдений движений трех советских ИСЗ вычислил сжатие земного эллипсоида и получил α = 1:298.2. Американский ученый И. Козаи по результатам наблюдений за движениями ИСЗ, запущенных в США, в 1961 г. получил α = 1 : 298.31, а в 1962 г. он, пользуясь результатами наблюдений за тринадцатью ИСЗ, получил α = 1 : 298.3. Результаты И. Д. Жонголовича и И. Козаи совпадают со значением, полученным Ф. Н. Красовским и А. А. Изотовым и имеющим вследствие этого международное значение. Развитие методов космических исследований привело к значительному

повышению точности определения фундамнтальных постоянных астрономии и геодезии. На Генеральной Ассамблее Международного астрономического союза в Гренобле в 1976 г. была принята «Система астрономических постоянных МАС (1976)», в которой указаны следующие параметры референц-эллипсоида: a = 6 378 140 ± 5 м, α = 1 : 298.257 (малую ось эллипсоида можно вычислить, зная величину большой оси и сжатие эллипсоида).

1.3. Элементы измерений на земной поверхности

Взаимное положение точек земной поверхности определяется путем измерения линий между ними и углов между направлениями. Для измерения линий применяются линейные приборы (рулетки, мерные ленты, радио- и светодальномеры), для измерения углов – угломерные.

Для составления карт берутся не измеренные значения линий на физической поверхности Земли, а их проекции на среднюю уровенную поверхность, допуская, что геоид и референц-эллипсоид на данном участке совмещены. Это удобно и тем, что все геодезические инструменты устанавливаются по уровню и их вертикальные оси таким образом совмещаются с отвесной линией. Если пользоваться референц-эллипсоидом, то проектирование точек земной поверхности следует производить по нормалям к сфероиду, направления которых не совпадают с отвесной линией и определение которых очень сложно. Поэтому измеренные расстояния проектируются отвесными линиями на поверхность эллипсоида и эти проекции используются при составлении карт.

Для определения пространственного положения точки земной поверхности кроме расстояний измеряются горизонтальные и вертикальные углы (последние чаще назвают углами наклона). Принцип измерения горизонтального угла состоит в том, что через вершину А (рис. 3) мысленно проводится горизонтальная плоскость M, касательная к уровенной поверхности в точке A. Затем направления линий AB и AC местности проектируются вертикальными плоскостями V_1 и V_2, проходящими через отвесную линию AA_1, на горизонтальную плоскость и в пересечении вертикальных и горизонтальной плоскостей получаются линии Ab и Ac. Угол β, заключенный между проекциями Ab и Ac линий

местности AB и AC на горизонтальную плоскость М, называется горизонтальным .

Для получения представления о повышениях и понижениях земной поверхности измеряют углы наклона v_1 и v_2, заключенные между направлениями линий на местности AB и AC и их проекциями Ab и Ac на горизонтальную плоскость. Угол v_1, расположенный ниже горизонтальной плоскости, называется отрицательным углом наклона или углом понижения и имеет знак минус, а угол v_2, расположенный над горизонтальной плоскостью, называется положительным углом наклона или углом повышения и имеет знак плюс. Углы в геодезии измеряются в градусной мере. Угол в 1° равен 1 : 360 части круга и содержит в себе 60′ (минут) и 3600″ (секунд). Кроме того величину угла можно определить отношением длины дуги к ее радиусу

$$\varphi = s/R. .$$

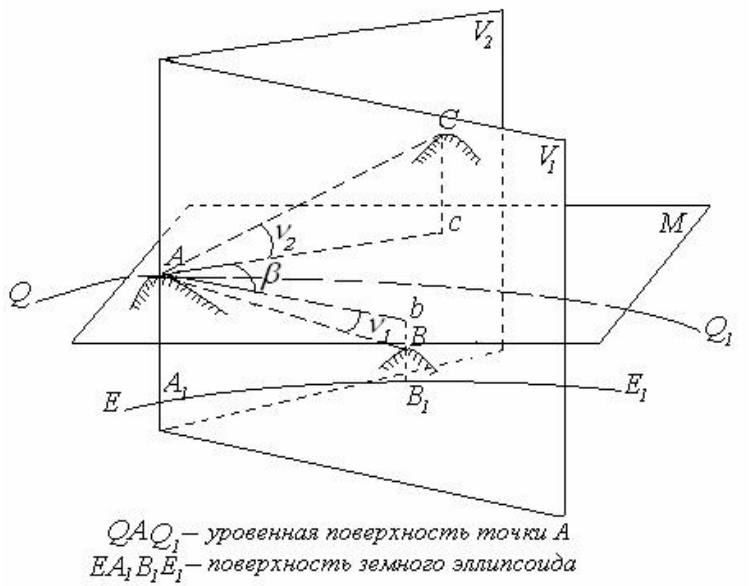


Рис. 3

При этом за единицу измерения принимается радиан, то есть угол, дуга которого равна радиусу: $s = R$. Поскольку в окружности

укладывается 2π радиусов, то окружность содержит 2π радиана. Следовательно, $\rho^o = 360^o/2\pi = 57.3^o$, $\rho' = 360\cdot 60'/2\pi = 3438'$, $\rho'' = 360\cdot 3600''/2\pi = 206265''$.

Для вычисления значения угла в градусной мере используется формула

$$\varphi = \rho s/R,$$

где под символом ρ подразумевается ρ^o, ρ' или ρ''.

Одновременно с градусной мерой применяется и градовая (главным образом, в европейских странах): прямой угол делится не на 90 частей, а на 100, называемых градами. Каждый град содержит в себе 100 градовых минут, а каждая градовая минута содержит 100 градовых секунд. Эта система не нашла широкого применения в России.

1.4. Определение положения точек земной поверхности

Физическая поверхность нашей планеты имеет неровности – углубления и возвышения. Поэтому измеренные на земной поверхности линии, для изображения их на бумаге, проектируются на горизонтальную плоскость. Ортогональная проекция $ab=s_1$ линии местности $AB=l_1$ на горизонтальную плоскость называется горизонтальным проложением (рис. 4), вычисляемым по формуле

$$ab = AB\cos\beta_1.$$

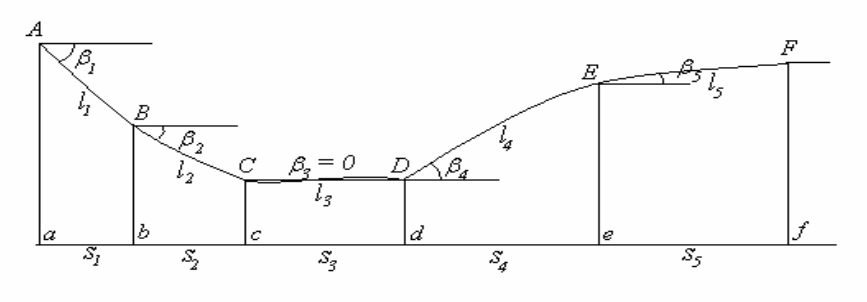


Рис. 4

Соответственно,

$$bc = BC\cos\beta_2, \ldots, \; ef = EF\cos\beta_5,$$
$$af = ab + bc + \ldots + ef = AB\cos\beta_1 + BC\cos\beta_2 +$$
$$+ \ldots + EF\cos\beta_5 = l_1\cos\beta_1 + l_2\cos\beta_2 + \ldots + l_5\cos\beta_5,$$

где β_1, β_2, …, β_5 – углы наклона.

Неровности земной поверхности характеризуются отметками, которые представляют собой числовые обозначения высот точек земной поверхности, то есть отрезков отвесных линий от поверхности Земли до уровенной поверхности. Если отметка точки определяется относительно уровенной поверхности океана или моря, то она называется абсолютной. Если же отметка определяется относительно какой-либо уровенной поверхности, проходящей через выбранную точку, то отметка называется относительной, или условной. Отметки точек нередко называют высотами или альтитудами и обозначаются буквой *H*. Разность отметок соседних точек земной поверхости называется превышением, которое обозначается буквой *h*. В зависимости от взаимного положения точек превышения могут быть положительными или отрицательными.

Положения точек земной поверхности будут известными, если кроме отметок будут известны еще и их ортогональные проекции на уровенную поверхность. Положения проекций этих точек определяются координатами в той или иной системе.

Очень удобной, единой для всего земного шара, является система географических координат: широта φ, отсчитываемая от экватора в пределах $0^o - 90^o$ к северу и югу, и долгота λ, отсчитываемая от 0° до 180° в обе стороны от начального меридиана (рис. 5). За начальный меридиан принимается Гринвичский (проходящий через астрономическую обсерваторию в Гринвиче). Положительными считаются северная широта и восточная долгота, отрицательными – южная широта и западная долгота.

Для определения горизонтальных проекций широко распространена система плоских прямоугольных координат (рис. 6). Ось абсцисс расположена в плоскости меридиана; положительным считается северное направление. Ось ординат лежит в плоскости первого вертикала (большого круга, перпендикулярного плоскости меридиана), и положительное направление – восточное.

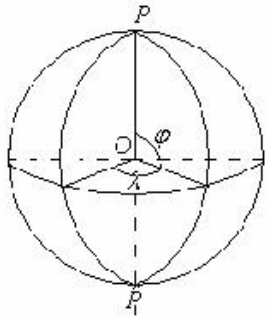


Рис. 5

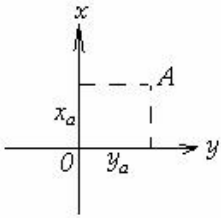


Рис. 6

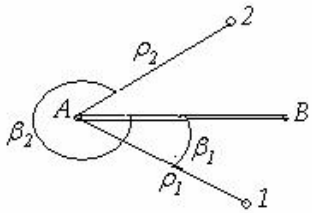


Рис. 7

Очень часто при выполнении топографо-геодезических работ используется система полярных координат – на плоскости и в пространстве. В геодезии наиболее часто применяется полярная система координат на плоскости. За начало координат принимается точка *A*, называемая полюсом, а жесткое направление *AB* называется полярой. Координатами определяемых точек являются полярные углы β, отсчитываемые от поляры по часовой стрелке в диапазоне $0^o - 360^o$, и полярные расстояния ρ.

2. ПЛАН И КАРТА

2.1. Изображение земной поверхности на плоскости

При изображении на бумаге поверхности Земли и ее частей нужно учитывать, что по форме она близка к эллипсоиду вращения, а в ряде случаев ее часто принимают за поверхность шара со средним радиусом 6371 км (иногда 6400 км). При съемке небольших участков кривизной шара вообще пренебрегают, считая уровенную поверхность плоскостью. Поэтому возникают вопросы: 1 − как влияет кривизна Земли на определение горизонтальных и вертикальных расстояний, 2 − в каком случае можно пренебречь влиянием кривизны? Для ответа на поставленные вопросы необходимо определить разность между дугой $AB=s$ и стягивающей ее хордой $AB=2R\sin\varphi$, с одной стороны, и дугой $AB=s$ и касательной $A'B'=2R\mathrm{tg}\varphi$ – с другой , то есть $\Delta s = s - AB$ и $\Delta s' = s - A'B'$ (рис. 8). Значение угла в радианной мере выразится: $\varphi = s/2R$..

Разлагая синус и тангенс угла в ряд и ограничиваясь вторым членом разложения, получим:

$$\sin\varphi = \varphi - \varphi^3/6 + \ldots, \quad \mathrm{tg}\varphi = \varphi + \varphi^3/3 - \ldots,$$

откуда

$$s - AB = s - 2R\sin\varphi = s - 2R(s/2R - s^3/48R^3 + \ldots) \approx s^3/24R^2, \qquad (2.1)$$

$$s - A'B' = s - 2R\mathrm{tg}\varphi = s - 2R(s/2R + s^3/24R^3 - \ldots) \approx - s^3/12R^2. \qquad (2.2)$$

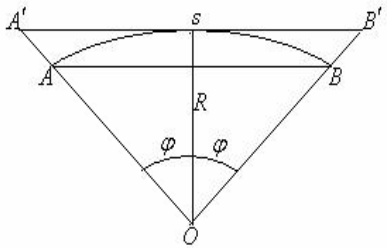


Рис. 8

Длина касательной $A'B'$ отличается от кривой на большую величину, чем длина хорды. Если взять $A'B'=20$ км, то при R=6400 км $|s^3/12R^2| \approx$ 0.016 м, т.е. по абсолютной величине эта разность меньше 2 см, а относительная погрешность будет менее 1:1 000 000. С такой точностью линии на

местности длиной 20 км можно измерить только самыми точными методами измерений. Следовательно, при изображении участков местности, имеющих протяженность до 20 км и площадь до 20х20 км^2 = 40 000 га, кривизну Земли можно не учитывать и часть уровенной поверхности таких размеров принимать за плоскость.

Изображение участка земной поверхности без учета кривизны Земли, то есть проектирование линий земной поверхности на горизонтальную плоскость значительно упрощает геодезические действия.

Приняв R = 6371.11 км, подсчитаем величину $|\Delta s| = s^3/12R^2$ для различных s (табл.2).

Таблица 2

Влияние кривизны земной поверхности на длину диний

s, км	Δs, см	Δs/s	s, км	Δs, м	Δs/s
10	0.20	1 : 4 926 000	40	0.13	1 : 304 000
20	1.64	1 : 1 218 000	50	0.26	1 : 195 000
30	5.55	1 : 304 000	100	2.05	1 : 49 000

При определении отметок точек земной поверхности кривизну Земли необходимо учитывать даже при небольших расстояниях. Пусть точки A и B находятся на одной уровенной поверхности. Тогда превышения между ними равны нулю:

$$H_B - H_A = 0.$$

Но если для определения превышения между точками A и B принимать не уровенную поверхность, а горизонтальную линию AB', касательную к уровенной поверхности в точке A, то точка B окажется ниже точки A на величину k, которая называется поправкой за кривизну Земли. Величина k зависит от расстояния s и может быть определена следующим образом.

Из прямоугольного треугольника OAB' (рис. 9) видно, что

$$R^2 + s^2 = = (R + k)^2,$$

откуда

$$s^2 = k(2R + k) \;\; и \;\; k = s^2/(2R + k)$$

Но поскольку величина k мала по сравнению с R, то ею в правой части последней формулы можно пренебречь. Тогда

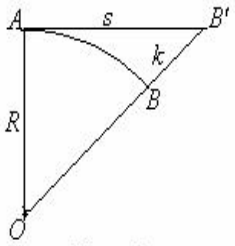


Рис. 9

$$k = s^2/2R.. \qquad (2.3)$$

Приняв R=6370 км и выражая все величины в метрах, для различных значений s получим следующие значения k (табл. 3):

Таблица 3.

s, м	k, м
100	00008
500	0.020
1 000	0.078
5 000	2.0
10 000	7.8

2.2. Понятие о плане, профиле и карте

Планом называется уменьшенное подобное изображение на плоскости горизонтального проложения участка земной поверхности. Естественно, что план нельзя составить на очень большую территорию, т.к. кривизна Земли вызовет большую разницу между горизонтальными проложениями линий местности и их проекциями на поверхность эллипсоида.

Картой называется уменьшенное закономерно искаженное изображение земной поверхности или значительной ее части, построенное с учетом кривизны Земли. Особенностью карты с геометрической точки зрения является то, что она представляет собой более или менее искаженное изображение земной поверхности. Это объясняется тем, что сферическую поверхность Земли невозможно изобразить на бумаге без искажений, так же, как нельзя поверхность выпуклого неэлластичного предмета развернуть

на плоскость без разрывов. Поэтому при построении карт пользуются различными картографическими проекциями, в которых по определенному математическому закону сначала строится географическая сетка параллелей и меридианов, а затем на нее наносятся детали местности. Существует большое количество проекций, и каждой из них свойственны искажения либо форм и изображаемых объектов, либо соотношения их площадей, либо и того и другого. Чем больше изображаемая на карте территория, тем с большими искажениями получаются на карте объекты.

К геодезическим материалам относится также и профиль местности, являющийся уменьшенным изображением вертикального разреза земной поверхности по заданному направлению. Линия, изображающая на чертеже уровенную поверхность, на профиле проводится в виде прямой. Для усиления изображения рельефа на профиле, большей его наглядности, вертикальные отрезки (отметки, превышения) изображают крупнее, чем горизонтальные. Разрез местности представляет собой обычно кривую линию, а профиль строят в виде ломаной линии, поворотные точки которой являются характерными точками местности, отметки которых определены.

Положение точек земной поверхности на карте и плане определяется как географическими, так и прямоугольными координатами.

2.3. Масштабы

Масштабом называется степень уменьшения изображений контуров и линий при перенесении их с местности на план или карту.

Обычно числа, показывающие, во сколько раз уменьшены линии местности, являются круглыми (500, 1000, 25000 и т. д.) и представляют собой знаменатели численных масштабов, которые выражаются аликвотными дробями (1 : 500, 1 : 1000, 1 : 25000 и т. д.). Чем меньше знаменатель численного масштаба, тем крупнее считается масштаб. Все планы составляются в крупных масштабах, карты – в крупных, средних и мелких. Зная численный масштаб, можно без особого труда линии местности переводить в линии на плане и карте и наоборот.

Чтобы не производить подобных вычислений, пользуются линейным масштабом. Для построения линейного масштаба выбирают основание масштаба, которое соответствует круглому числу метров на местности. Приняв за основание масштаба отрезок в 1см (иногда 2 см), откладывают на прямой его несколько раз и подписывают. Левое основание делят на пять или десять частей (рис. 10, а). Взяв расстояние на плане (карте) в раствор циркуля-измерителя, одну его ножку устанавливают на штрих, разделяющий основания так, чтобы другая ножка попала на левое основание, по которому на глаз отсчитывается расстояние в интервале делений. На рис. 10, *а)* отсчет равен 477 м.

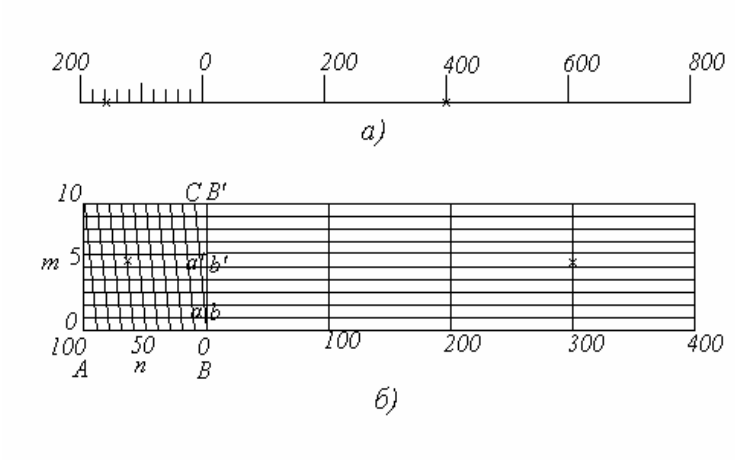


Рис. 10

Оценивая на глаз доли делений по линейному масштабу, невозможно достаточно точно измерить расстояние по плану. Поэтому пользуются поперечным масштабом, который строится следующим образом. Выбирают основание масштаба *AB* (рис. 10, б) и откладывают его несколько раз на горизонтальной прямой. Из точек, разделяющих равные основанию отрезки, восстанавливают перпендикуляры к этой прямой. Левое основание делят на пять или десять делений, в общем случае − на *n* делений, а на перпендикулярах откладывают *m* делений. Через полученные точки на перпендикулярах проводят линии, параллельные основанию.

Затем на левом основании проводят ряд линий, параллельных BC, как показано на рис. 10, *б)*, называемых *трансверсалями*. Отрезок ab называется наименьшим делением поперечного масштаба. Величина его зависит от длины основания AB и числа делений n и m.

Из подобия треугольников BCB' и Bab следует, что $Ab = Bb \cdot CB'/BB' = CB'/m$; но $CB' = AB/n$, поэтому $ab = AB/mn$.

Поперечный масштаб, у которого $m=n=10$ ($mn=100$) называется сотенным масштабом; обычно он нарезается (гравируется) на металлической линейке, называемой масштабной, или на транспортире. Поперечный масштаб с основанием 2 см, на котором подписанные цифры означают десятые и сотые доли основания, называется нормальным поперечным масштабом.

Расстояние, взятое с плана (масштаб 1 : 5 000) и отмеченное на рис. 10, *б)* крестиками, будет равно $3AB + 6AB/n. + 5.4ab = 365.4$ *м* $(a'b' = 5ab)$.

При всех достоинствах поперечный масштаб не может обеспечить определенного предела, зависящего от свойств человеческого глаза. Глаз человека в состоянии совмещать острие ножки циркуля с точкой на плане, точку с точкой, штрих со штрихом с точностью около 0.1 мм, если они находятся на расстоянии 25 см от глаза . Из этого следует, что изображаемые на плане детали местности (выступы, изгибы и др.) обусловлены точностью масштаба, которая представляет собой длину линии на местности, соответствующую 0.1 мм на плане (по исследованиям кафедры геодезии МИИЗ точость масштаба равна 0.08 мм) . Например, точность масштаба 1 : 10 000 равна 1 м, масштаба 1 : 50 000 - 5 м и т. д. В соответствии с точностью масштаба при изображении деталей объектов местности на плане и карте неизбежны обобщения.

Если объект местности очень мал, а изобразить его на плане необходимо, то его изображают так называемым внемасштабным условным знаком, т.е. независимо от точности масштаба. Например, нередко колодец в горизонтальной проекции является квадратом со стороной 1 м и в масштабе 1 : 10 000 он представляется точкой (0.1 мм), но на планах масштабов 1 : 1000 – 1 : 50 000 он изображается зеленым кружком диаметром 1.2 – 1.4 мм.

2.4. Понятие о картографических проекциях

Изображая земную поверхность на карте, вначале переходят от физической ее формы к математической, которую представляют в виде поверхности эллипсоида или шара, а затем уже математическую поверхность изображают на плоскости. Поскольку выпуклую поверхность невозможно изобразить на плоскости без искажений и разрывов, то при изображении земной поверхности на плоскости принимают условия, позволяющие учитывать эти искажения. Такие условные изображения на плоскости земной поверхности называют картографическими проекциями. Картографические проекции строятся по математическому закону, определяющему их вид. Построение некоторых проекций можно представить геометрически.

Допустим, что из какой-либо точки земной оси все точки земной поверхности проектируются прямыми лучами на плоскость, перпендикулярную земной оси (рис. 11). Такая проекция называется полярной. В ней меридианы изображаются пучком прямых, а параллели – концентрическими окружностями.

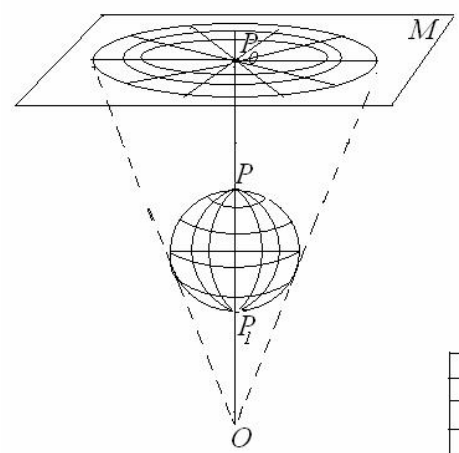


Рис. 11

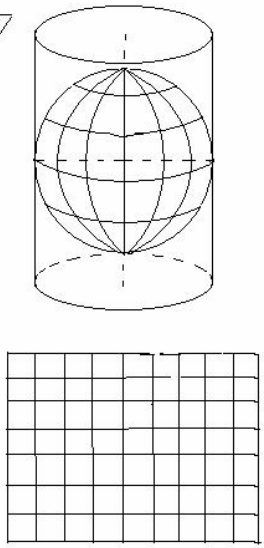


Рис. 12

Если земную поверхность спроектировать на боковую поверхность цилиндра (рис.12 а), а затем развернуть последнюю на плоскость, то получим прямую цилиндрическую проекцию (рис.12 б).

Проекцию часто определяют не по способу ее геометрического построения, а по виду изображенных на ней параллелей и меридианов, т. е. по виду картографической сетки (например, коническая проекция − картографическая проекция, в которой параллели − дуги концентрических окружностей, а меридианы − прямые, сходящиеся в центре этих окружностей).

2.4.1. Конформная проекция Гаусса

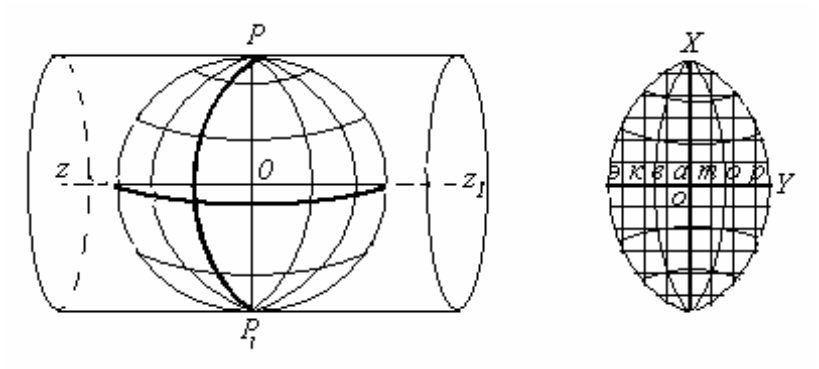
Для изображения территории нашей страны на топографических картах принята конформная (равноугольная) проекция Гаусса, которая представляет поперечную цилиндрическую проекцию.

Вся земная поверхность при изображении ее в проекции Гаусса делится меридианами на шестиградусные или трехградусные зоны. Каждая зона проектируется на поверхность своего цилиндра, касающегося шара по среднему (осевому) меридиану. Деление земной поверхности на зоны при изображении ее на плоскости в проекции Гаусса вызвано тем, что по мере удаления от осевого меридиана искажения возрастают. Выбор в 6° или 3° зависит от масштаба составляемой карты: при составлении карты в масштабе 1 : 10 000 и мельче берутся зоны 6°, а при составлении карт масштаба 1 : 5 000 и крупнее берутся зоны 3°.

Шестиградусные зоны по своему расположению совпадают с колоннами карты масштаба 1 : 1 000 000 и нумеруются арабскими цифрами, начиная от лондонской ветви гринвичского меридиана, с запада на восток. Так как западная граница первой зоны совпадает с гринвическим меридианом, то долготы осевых меридианов зон будут 3°, 9°, 15°, 21°, ... Долготу осевого меридиана можно опредлить по формуле

$$L = 6N - 3^\circ, \qquad (2.4)$$

где N – номер зоны.



а) б)

Рис. 13.

Положение точек в проекции Гаусса можно определить по географическим координатам, но при решении геодезических задач это неудобно. На плоскости гораздо проще решать задачи по прямоугольным координатам. Для этого в каждой зоне систему координат берут со своим началом и своей ориентировкой: за ось абсцисс x принимают изображение осевого меридиана, а за ось y – изображение экватора. Расстояние x и y на плоскости в проекции Гаусса от какой-либо точки зоны до осей координат называют координатами Гаусса (рис. 13, б).

Чтобы все значения ординат были положительными, к ним прибавляют 500 км. Для определения зоны, в которой находится точка, к преобразованной ординате этой точки приписывается номер соответствующей зоны.

В проекции Гаусса не искажаются только углы. Остальные элементы фигур местности (длины линий, площади) в этой проекции получают искажения. О величине искажения длин линий судят по величине масштаба изображений. Масштабом изображения любой проекции называется отношение длины отрезка в проекции к длине соответствующего отрезка на эллипсоиде (или шаре).

Пусть длина отрезка на эллипсоиде (или шаре) равна s, а длина изображения в проекции Гаусса – $s_г$. Масштаб изображения m в проекции Гаусса можно выразить формулой

$$m = s_г/s. \qquad (2.5)$$

Относительное искажение линий определяется величиной

$$m - 1 = (s_г - s)/s = \Delta s/s. \qquad (2.6)$$

Масштаб изображения в пределах одной и той же зоны различен и зависит от удаленности отрезка от осевого меридиана. Для установления этой зависимости дадим понятие о прямоугольных сферических координатах.

Представим Землю в виде шара (рис. 14), проведем на нем осевой меридиан и экватор. Приняв эти линии за оси координат x и y, положение точки A можно определить дугой A_0A большого круга, перпендикулярного к осевому меридиану, и дугой OA_0 осевого меридиана. Дуги $OA_0 = x$ и $A_0A = y$ и будут сферическими прямоугольными координатами точки A.

Опишем около шара цилиндр так, чтобы он касался по осевому меридиану шара. Возьмем на шаре дугу AB малого круга, параллельного осевому меридиану. В поперечной цилиндрической проекции Гаусса сферические ординаты A_0A, B_00B изображаются на цилиндре отрезка образующих A_0A_1 и B_0B_1, а дуга AB – в виде дуги A_1B_1, равной и параллельной дуге A_0B_0, расположенной на осевом меридиане.

В проекции Гаусса, вследствие ее конформности, бесконечно малые фигуры подобны соответствующим фигурам местности. Поэтому отношение длин бесконечно малых отрезков в проекции, выходящих из одной и той же точки по всем направлениям, к длинам соответствующих отрезков на земной поверхности будут одинаковыми, т. е. масштаб изображения в проекции Гаусса в бесконечно малой окрестности какой-либо точки одинаков по всем направлениям.

Для вывода формулы масштаба изображений в проекции Гаусса составим соотношение дуги A_1B_1, расположенной на цилиндре, к соответствующей дуге AB, расположенной на шаре

$$m = A_1B_1/AB. \qquad (2.7)$$

Но $A_1B_1 = A_0B_0 = R\beta$, а $AB = r\beta$, где R – радиус шара, r – радиус малого круга, β – двугранный угол, образованный

плоскостями, в которых лежат дуги A_0A и B_0B. Подставив выражение дуг A_1B_1 и AB в равенство (2.7), получим

$$m = R/r.$$

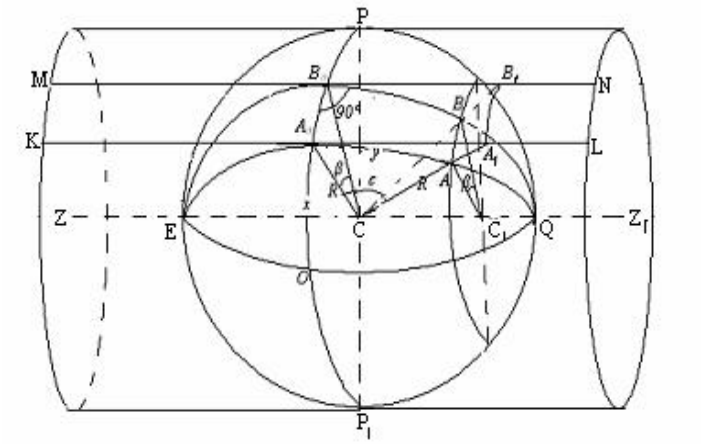


Рис. 14

Из треугольника AKK_1 найдем $r = R\cos\varepsilon$. Тогда $m = 1/\cos\varepsilon = \sec\varepsilon$. Из рис. 14 видно, что $\varepsilon = y/R$. Для точек, лежащих внутри шестиградусной зоны, по сравнению с радиусом Земли R ордината y – величина небольшая, поэтому и угол ε – малая величина. Разложив $\sec\varepsilon$ в ряд Маклорена и ограничившись ввиду малости угла двумя членами разложения, получим

$$m = 1 + \varepsilon^2/2.$$

Подставив сюда $\varepsilon = y/R$, окончательно получим

$$m = 1 + y^2/2R^2. \qquad (2.8)$$

Относительное линейное искажение выразится формулой

$$m - 1 = y^2/2R^2. \qquad (2.9)$$

На осевом меридиане $y = 0$, поэтому здесь линейное искажение равно 0, а масштаб изображения $m = 1$. Эти равенства следуют также из того, что осевой меридиан является линией касания шара и цилиндра и проектируется с шара на цилиндр без искажения длины. Наибольшее искажение получают линии, находящиеся на краю зоны на широте экватора: $y \approx 330$ км и $m - 1 = 1 : 800$.

На территории бывшего СССР наибольшее относительное искажение линий в шестиградусной зоне достигало величины 1 : 1 200, что практически не имеет значения при съемках в мелких масштабах и заметно при съемках в крупных масштабах (1 : 5 000 и крупнее). По этой причине при крупномасштабных съемках применяют трехградусные зоны, искажение в которых на краю зоны значительно меньше, чем в шестиградусных зонах. Трехградусные зоны располагаются так, чтобы осевой меридиан одной из зон совпадал с гринвическим меридианом. Из этого следует, что долготы осевых меридианов зон, расположенных к востоку от Гринвича, будут 3°, 6°, 9°, …

2.5. Номенклатура карт

Как уже отмечалось выше, кривизна Земли в пределах небольших территорий не имеет практического влияния на точность изображения, нанесенного на карту. Это позволяет создавать топографические карты в виде отдельных небольших листов, каждый из которых сравнительно свободен от искажений. Рамки этих листов и их размеры устанавливаются на основании правил, позволяющих точно определить положение и место для каждого из них.

Пятый международный географический конгресс в 1891 г. принял решение о составлении и издании карты мира масштаба 1 : 1 000 000. Позднее было установлено, что каждый лист такой карты должен охватывать территорию в 4° по широте и 6° по долготе. При этом поверхность Земли была условно разделена на ряды вдоль параллелей, отстоящих одна от другой на 4°, и колонны вдоль меридианов, отстоящих один от другого на 6°. Ряды обозначаются порядковыми буквами латинского алфавита, начиная

Рис. 15

с буквы А от экватора к обоим полюсам; колонны нумеруются арабскими порядковыми цифрами, начиная от меридиана 180° (рис. 15).

Номенклатура (обозначение листа) карты масштаба 1 : 1 000 000 состоит из буквы и цифры, которые записываются через тире: например, М-37. Так как карта масштаба 1 : 1 000 000 начала создаваться как международная, то и разграфка получила название международной разграфки. Начиная от пояса Р, то есть от широты 60°, листы создаются сдвоенными по долготе, а с пояса Т, то есть с широты 76° – счетверенными.

В нашей стране издаются карты масштабов 1 : 1 000 000, 1 : 500 000, 1 : 300 000, 1 : 200 000, 1 : 100 000, 1 : 50 000, 1 : 25 000, 1 : 10 000 и более крупных масштабов.

Для установления номенклатуры листа масштаба 1 : 500 000, охватывающего территорию в 2° по широте и 3° по долготе, следовательно, четвертую часть листа карты масштаба 1 : 1 000 000, этот последний делится на 4 части, каждая из которых обозначается прописными буквами русского алфавита (рис. 16). Номенклатура листа карты масштаба 1 : 500 000 составится из номенклатуры листа карты маасштаба 1 : 1 000 000 и его порядкового обозначения. В примере, приведенном на рис. 20, номенклатура заштрихованного листа N-37-Б.

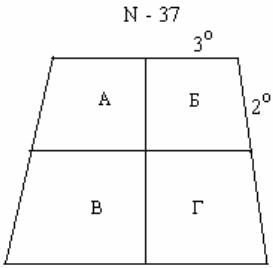


Рис. 16

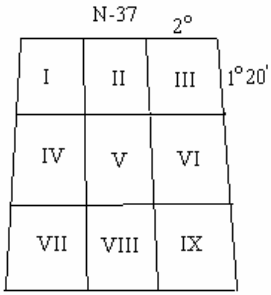


Рис. 17

Для разграфки листа масштаба 1 : 300 000 лист карты масштаба 1 : 1 000 000 делится на 9 частей, так как каждый лист карты масштаба 1:300 000 охватывает территорию в 1°20′ по широте и 2° по долготе (рис. 17). Каждый из листов карты масштаба

1 : 300 000 внутри листа 1 : 1 000 000 обозначается порядковым номером римскими цифрами. Номенклатура листа карты масштаба 1 : 300 000 также составляется из номенклатуры листа масштаба 1 : 1 000 000 и его порядкового номера, но, в отличие от всех других карт, здесь порядковый номер ставится не после, а перед номенклатурой листа масштаба 1 : 1 000 000. Лист, заштрихованный на рис. 21, получит номенклатуру III-N-37.

Листы карты масштаба 1 : 200 000 охватывают территорию в 40′ по широте и 1° по долготе каждый и занимает 1 : 36 часть листа карты масштаба 1 : 1 000 000 (рис. 18). Лист карты масштаба 1 : 200 000 внутри листа карты масштаба 1 : 1 000 000 так же, как и листы карты масштаба 1 : 300 000, нумеруются римскими порядковыми цифрами, но при установлении номенклатуры его порядковый номер ставится после номенклатуры листа масштаба 1 : 1 000 000. Номенклатура заштрихованного листа на рис. 19 будет N-37-XX.

Каждый лист карты масштаба 1 : 100 000 охватывает территорию в 20′ по широте и 30′ по долготе и составляет 1 : 144 часть листа масштаба 1 : 1 000 000. Свою номенклатуру он, подобно другим, получает из номенклатуры листа карты масштаба 1 : 1 000 000 и своего порядкового номера внутри этого листа, обозначенного арабскими цифрами (рис.19). Номенклатура листа, заштрихованного на рис. 19, будет N-37-104.

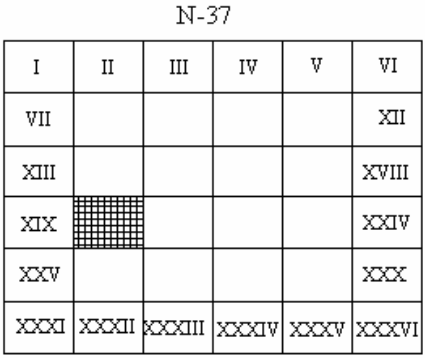


Рис. 18

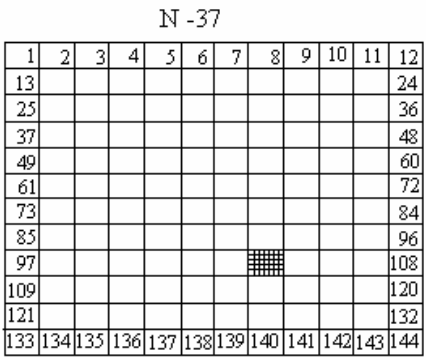


Рис. 19

Номенклатуры листов более крупных масштабов имеют своим основанием номенклатуру листа карты масштаба 1 : 100 000.

Четыре листа карты масштаба 1 : 50 000 обозначаются внутри листа карты масштаба 1 : 100 000 подобно тому, как внутри листа карты масштаба 1 : 1 000 000 обозначаются листы карты масштаба 1 : 500 000. При этом порядковый номер (буква) листа карты масштаба 1 : 50 000 прибавляется к номенклатуре листа карты масштаба 1 : 100 000, например, N-37-104-Б.

Дальнейшая разграфка состоит в делении листа на четыре части, чтобы получить разграфку для масштаба следующей градации. Так, лист карты масштаба 1 : 25 000 составляет 1 : 4 часть листа карты масштаба 1 : 50 000, а лист карты масштаба 1 : 10 000 составляет 1:4 часть листа карты масштаба 1 : 25 000. Листы карты масштаба 1 : 25 000 обозначаются внутри листа карты масштаба 1 : 50 000 порядковыми строчными буквами русского алфавита, например, N-37-104-Б-в, а листы карты масштаба 1 : 10 000 внутри листа карты масштаба 1 : 25 000 – арабскими порядковыми цифрами, например, N-37-104-Б-в-4.

Основанием для номенклатуры листов карт масштабов 1 : 5 000 и 1 : 2 000 служат листы карты масштаба 1 : 100 000. В одном листе масштаба 1 : 100 000 содержится 256 листов карты масштаба 1 : 5 000, которые обозначаются арабскими цифрами 1, 2, 3, …, 256, заключенные в скобки. Размеры каждого листа в градусной мере: $\Delta\varphi = 1'15''$, $\Delta\lambda = 1'52.5''$. Например, номенклатура последнего листа будет N-44-144-(256).

В одном листе карты масштаба 1 : 5 000 содержится девять листов карты масштаба 1 : 2 000, которые обозначаются строчными буквами русского алфавита а, б, в, …, и, заключенными в скобки; номенклатура последнего листа N-44-144-(256-и). Размеры листов карты масштаба 1 : 2 000 $\Delta\varphi = 25''$, $\Delta\lambda = 37.5''$.

На участках съемки менее 20 км^2 допускается прямоугольная разграфка планов масштабов 1 : 5 000, 1 : 2 000, 1 : 1 000 и 1 : 500 с особой нумерацией листов.

2.6. Изображение рельефа на планах и картах

Земная поверхность не является плоскостью: даже равнинные места на небольших участках не плоские в математическом смысле слова. Совокупность разнообразных неровностей земной поверхности называют рельефом.

Для изображения рельефа на планах и картах применяют условные обозначения, которые дали бы представления о форме земной поверхности, крутизне скатов, отметках точек и превышениях. Существует несколько способов изображения и обозначения рельефа, из которых одни удовлетворяют всем только что указанным условиям, другие не удовлетворяют им полностью.

Наиболее распространенным и удовлетворяющим всем перечисленным требованиям является способ изображения рельефа на планах и картах при помощи горизонталей (изогипс).

Горизонталью называется след, получающийся от сечения земной поверхности уровенной поверхностью, и, следовательно, горизонталь есть линия на земной поверхности, все точки которой имеют одинаковые отметки.

При изображении рельефа местности горизонталями обязательным является условие, чтобы уровенные поверхности, рассекающие земную поверхность, отстояли одна от другой на одном и том же расстоянии h, называемом высотой сечения рельфа. Горизонтали проектируются на горизонтальную плоскость M (или на поверхность эллипсоида) для изображения их на плане (или карте). Для того, чтобы отличить изображения положительных (гор) и отрицательных (котловин) форм рельефа, от одной или нескольких горизонталей проводятся скатштрихи (бергштрихи) в сторону понижения ската (рис. 20). При изображении хребтов и лощин наибольший изгиб горизонталей будет у водораздела и водотока. Отметки горизонталей, кратные высоте сечения, подписываются либо в разрыве горизонталей, либо у их концов так, чтобы нижняя часть цифр располагалась ниже по скату, указывая на понижение рельефа. Высота сечения выбирается в зависимости от:

− масштаба карты (плана): чем крупнее масштаб, тем меньше высота сечения;

− характера местности: для горной местности высота сечения больше, чем для равнинной;

− требуемой точности и детальности, определяемой хозяйственно-техническими соображениями: чем точнее и детальнее требуется изобразить рельеф, тем меньше должна быть высота рельефа.

Если отдельные детали рельефа, находясь между горизонталями, не отображаются при выбранной высоте сечения рельефа, то в этих местах прерывистыми линиями проводятся полугоризонтали, а иногда и четверть-горизонтали – линии, проходящие через точки с одинаковыми отметками, кратными половине или четверти высоты сечения рельефа. По горизонталям можно быстро и просто определить отметки точек, лежащих на горизонталях, а также превышение между ними. Если точка лежит между горизонталями, то ее отметку можно определить следующим образом. Через точку *B* (рис. 21, а), отметку которой определяют, проводят прямую *AC*, являющуюся кратчайшим расстоянием между соседними горизонталями. Отрезки *AB* и AC определяют по плану. Для вычисления отметки точки B по известным отметкам точек *A* и *C* на горизонталях строится профиль вдоль линии *AC* (рис. 21, б).

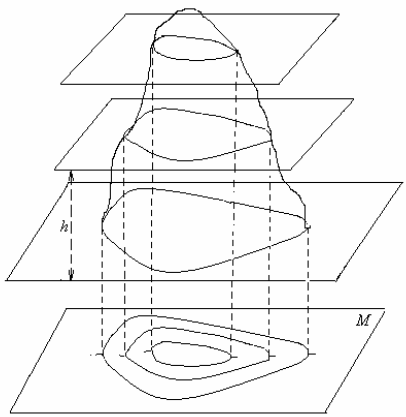


Рис. 20

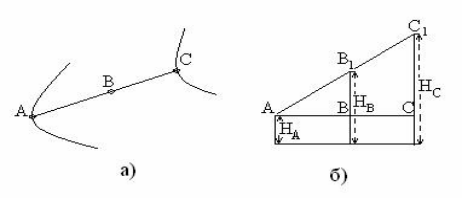


Рис. 21

Решение задачи сводится квычислению превышения BB_1 между точками *A* и *B*. Из подобия треугольников ACC_1 и ABB_1 следует $BB_1/h = AB/AC$ и $BB_1 = AB \cdot h/AC$.

Отношение высоты сечения *h* к горизонтальному проложению *AC* называется уклоном линии. Обозначив его через *i*, получим $h/AC = i$, $BB_1 = i \cdot AB$, т.е. превышение BB_1 равно произведению уклона на горизонтальное проложение. Уклон линии будет также тангенсом угла наклона, потому что $h/AC = tgv$.

Отметку точки *B* можной опредлить по формуле

$$H_B = H_A + BB_1 = H_A + i \cdot AB. \qquad (2.10)$$

.

Уклон линии может быть положительным и отрицательным в зависимости от знака превышения. Уклон линии, превышение и угол наклона, определенные в одном и том же направлении, имеют один и тот же знак.

Уклон линии между соседними горизонталями может быть быстро и просто определен графически с помощью номограммы, называемой масштабом крутостей, который обычно изображают на топографических картах (рис. 22).

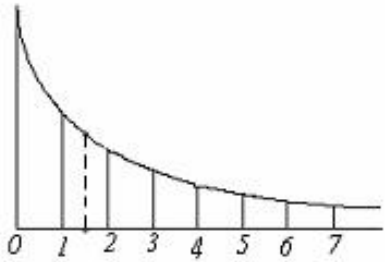


Рис. 22

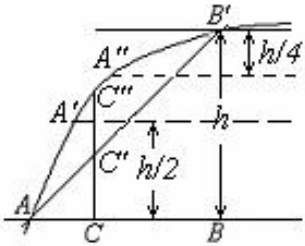


Рис. 23

Уклон и отметку точки по горизонталям определяют приближенно, если профиль местности между соседними горизонталями выражается не прямой линией, а выпуклой или вогнутой, то есть уклон между точками *A* и *B* не является однородным. В этом случае при решении задачи описанным способом отметка точки *C* (рис. 23) определяется с ошибкой, равной отрезку *C'C"*. Поэтому для исключения (или уменьшения) подобных ошибок при изображении рельефа используются полугоризонтали (проведенные через половину сечения рельефа − *h/2*) и четверть-горизонтали (проведенные через 1/4 высоты сечения рельефа − *h/4*). На рис. 23 полугоризонталь и четверть-горизонталь проходят через точки *A'* и *A"* соответственно. Если точка *C* лежит между горизонталями с одинаковыми отметками, то точно определить отметки указанным способом невозможно.

2.7. Ориентирование линий на местности

При проектировочных и съемочных работах требуется знать расположение объектов по отношению к странам света. Карты и планы составляются так, что верхние их края являются северными. Для этого при измерениях на местности линии ориентируют по географическому меридиану. Географическим (истинным) меридианом называют линию, полученную в пересечении плоскости, проходящей через земную ось, с поверхностью эллипсоида (шара). Направление географического меридиана на местности определяется из астрономических наблюдений.

При составлении планов на небольшой участок при отсутствии опорной сети и четких ориентиров (например, при выполнении геологических изысканий в тайге, тундре) ориентировать линии можно по магнитному меридиану. Магнитным меридианом называют линию, получающуюся в пересечении отвесной плоскости, проходящей через полюсы магнитной стрелки (компаса, буссоли), с горизонтальной плоскостью.

Географический и магнитный меридианы, как правило, не совпадают. Между ними образуется угол δ, называемый склонением магнитной стрелки (рис. 24). Склонение может быть восточным, когда северное направление магнитного меридиана отклоняется от географического меридиана к востоку, и западным – в случае отклонения северного направления магнитного меридиана к западу. Восточное склонение имеет знак плюс, западное – минус. Склонение изменяется с изменением места и времени и на территории нашей страны колеблется от +30º (северная оконечность Новой Земли) до –14º (в районе Верхоянска).

Положение магнитных полюсов на Земле в течение веков изменяется. На одном и том же месте земной поверхности происходит изменение склонения магнитной стрелки в пределах десятков градусов, при этом полный период колебания склонения совершается в течение 4-х веков. Такое изменение называют вековым.

Годовое изменение склонения в Европе в среднем близко к 6′. В настоящее время западное склонение уменьшается, а восточное - увеличивается. Наблюдается также суточное изменение склонения, при котором амплитуда его колебания в течение суток в средних

широтах России доходит до 15′. Летом она больше, чем зимой; в северных широтах она больше, чем в южных.

Склонение также изменяется под влиянием магнитных возмущений и магнитных бурь, связанных с полярным сиянием, солнечными пятнами. Показания магнитной стрелки сильно изменяются с изменением места наблюдения в районах залегания магнитных руд. Такие отступления от среднего значения склонения магнитной стрелки называют магнитными аномалиями. Так, например, в районе Курской магнитной аномалии склонение изменялось до 180º на расстоянии нескольких метров.

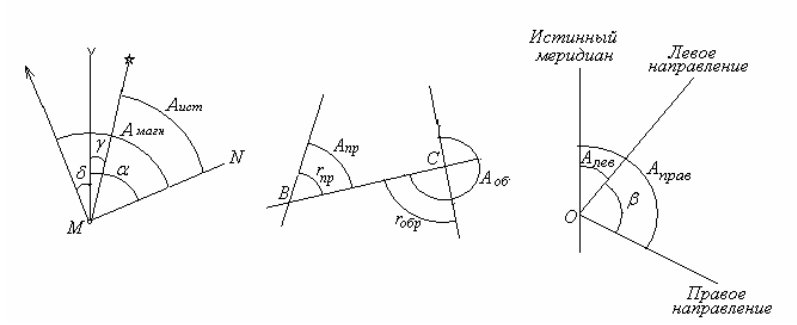


Рис. 24 Рис. 25 Рис. 26

Для ориентирования линий местности относительно меридиана служат азимуты и румбы. Азимутом называют угол, отсчитываемый от северного направления меридиана по ходу часовой стрелки до направления данной линии. Если линию ориентируют относительно географического меридиана, то азимут называют географическим или истинным, а если относительно магнитного меридиана - то магнитным. Разность между географическим и магнитным азимутами равна склонению магнитной стрелки, т. е. $A_г - A_м = \delta$. Азимут может иметь значения от 0º до 360º.

Румбом называется угол не более 90º, отсчитываемый от ближайшего направления меридиана до направления данной линии. Величина румба сопровождается буквами названий стран света: *св*, *юв*, *юз*, *сз*.

Линия имеет два направления – прямое и обратное, поэтому различают прямые и обратные азимуты и румбы (рис. 25).

Зная азимуты сторон, можно вычислить горизонтальный угол как разность азимутов правой и левой сторон угла: $\beta = A_{прав} - A_{лев}$ (рис. 26).

Прибором для определения магнитных азимутов и румбов служит буссоль, представляющая собой круглую коробку, в центре которой на шпиле насажена магнитная стрелка. Отсчет азимутов и румбов производится против концов магнитной стрелки по кольцу буссоли, на котором нанесены градусные и полуградусные деления. В зависимости от надписи делений различают кольца азимутальные и румбические. Деления на азимутальном кольце надписаны от 0° до 360° против хода часовой стрелки. При определении азимута нулевой диаметр кольца буссоли должен совпадать с направлением линии, азимут которой определяется; нуль должен быть обращен к наблюдаемому предмету, отсчет азимута производится по северному концу магнитной стрелки. При пользовании буссолью с румбическим кольцом, на котором деления надписаны в обе стороны от 0° до 90°, нулевой диаметр должен совпадать с направлением линии, румб которой определяется. Отсчет величины румба выполняется по любому концу магнитной стрелки. Название румба определяется в зависимости от того, между какими странами света направлена линия.

Из-за непараллельности меридианов прямой и обратный азимуты одной и той же линии отличаются между собой не ровно на 180°. Это вызывает неудобства при вычислительной обработке результатов измерений. Поэтому для упрощения вычислений направления линий пользуются дирекционными углами, которые отличаются от азимутов тем, что отсчитываются не от меридиана, а от северного направления линии, параллельной осевому меридиану, по ходу часовой стрелки до направления данной линии. Дирекционные углы, как и азимуты, могут быть в пределах от 0° до 360° и, в отличие от азимутов, не изменяются для прямой линии во всех ее точках. Разность между азимутом A и дирекционным углом α называется Гауссовым сближением меридианов:

$$\gamma_Г = A - \alpha. \qquad (2.15)$$

Гауссово сближение меридианов в данной точке можно определить как угол между направлением меридиана в данной точке

и линии, параллельной осевому меридиану. Оно будет положительным для точек местности, находящихся к востоку от осевого меридиана, и отрицательным для точек, находящихся к западу от осевого меридиан

2.8. Сближение меридианов. Переход от азимута к дирекционному углу

При обработке геодезических измерений, когда имеются азимуты, полученные из астрономических наблюдений, приходится переходить от азимутов к дирекционным углам, для чего необходимо знать сближение меридианов.

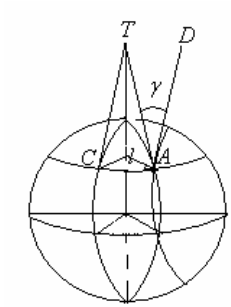


Рис. 27

Представим, что Земля имеет форму шара. Проведем через данную точку *A* меридиан, дугу малого круга, параллельного осевому меридиану, и дугу параллели *AC* (рис. 27). Через точку *C* проведем касательную *CT* к осевому меридиану, а через точку *A* - касательную *AT* к меридиану и касательную *AD* к малому кругу. Угол *DAT* изобразится на плоскости в прооекции Гаусса без искажений и его изображение на плоскости является сближением меридианов. Будем считать, что точка *A* находится недалеко от осевого меридиана. В этом случае прямая *AD* почти параллельна прямой *CT*. Поэтому можно считать, что практически $\angle CTA = \angle TAD$.

Ввиду малости дуги *AC* ее можно принять приближенно за дугу окружности радиуса *TA*. Тогда

$$\gamma = AC./AT = r\ell/AT, \qquad (2.16)$$

где r – радиус параллели, ℓ- центральный угол,стягивающий дугу *AC*. Из треугольника *OTA*, в котором $\angle OAT = 90^\circ$, $\angle AOT = 90^\circ - B$ и $OA = R$, получим

$$AT = Rtg(90 - B) = RtgB.$$

Подставив полученные выражения для AC и AT в равенство (2.16), найдем

$$\gamma = r\ell/RctgB. \qquad (2.17)$$

Из прямоугольного треугольника AOO_1: $r = Rsin(90^\circ - B) = RcosB$. Подставив это выражение в равенство (2.17), после сокращения получим

$$\gamma = \ell sinB, \qquad (2.18)$$

где $\ell = L - L_0$, L – долгота меридиана, проходящего через данную точку, L_0 – долгота осевого меридиана.

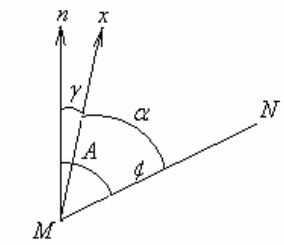


Рис. 28

Зависимость между азимутом и дирекционным углом какого-либо направления легко установить на основании рис. 28, где изображено в проекции Гаусса: MN – линия местности, An − направление истинного меридиана, Mx − направление осевого меридиана, A – истинный азимут, α - дирекционный угол, γ - сближение меридианов. Зависимость выражается формулой

$$\alpha = A - \gamma. \qquad (2.19)$$

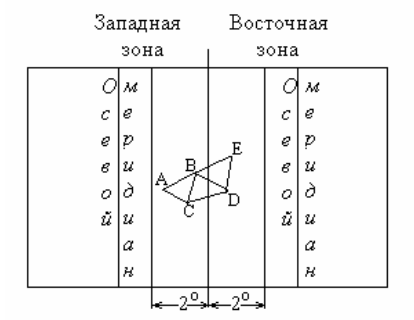


Рис. 29

При выполнении геодезических работ вблизи раздельного меридиана двух зон иногда приходится строить опорную сеть на основе пунктов, расположенных в разных зонах (рис. 29).

Для уравнивания построенной сети необходимо, чтобы исходные пункты имели координаты в какой-либо одной системе координат. Поэтому в каталогах пунктов государственной сети приводятся двойные координаты (т. е. в системах координат двух зон) для тех пунктов, которые

расположены вблизи раздельного меридиана двух смежных зон в пределах некоторой полосы, называемой перекрытием зон. При этом принято, что западная зона перекрывает восточную, а восточная западную на 2°.

2.9. Определение площадей

Существуют три способа определения площадей на топографических планах и картах: геометрический, аналитический и механический.

2.9.1. Геометрический способ

Геометрический способ – это вычисление площади геометрических фигур по измеренным длинам сторон и углов между ними. Применение геометрического способа на местности требует разбиения участка на простые геометрические фигуры, что возможно лишь при наличии видимости внутри участка. Формулы вычисления площадей простейших геометрических фигур – треугольника, четырехугольника (ромба, прямоугольника, квадрата) известны:

$$P = 0.5ah, \quad P = 0.5ab\sin C, \quad P = p(p-a)(p-b)(p-c); \qquad (2.20)$$

$$P_r = ah, \quad P_p = ab, \quad P_q = a^2, \qquad (2.21)$$

где a, b, c − стороны геометрических фигур, h и C − высота и угол между сторонами a и b соотвтетственно.

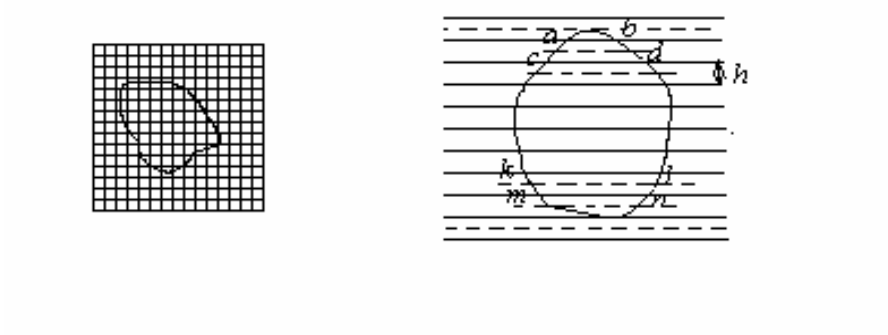
Для повышения точности определения площади участков на топографических планах и картах стороны и высоты треугольников, стороны и диагонали четырехугольников измеряются с помощью поперечного масштаба дважды и вычисление площадей выполняется по двум различным высотам и двум различным основаниям фигур. Допустимость расхождения между двумя значениями площади определяется по формуле

$$\Delta P_{га} = 0.04M\sqrt{P_{га}}/10\,000,$$

где M − знаменатель численного масштаба карты (плана).

Для вычисления площади участка, представляющего собой многоугольник, можно использовать формулы вычисления площади четырехугольника, пятиугольника и любого n-угольника. Но с увеличением n прогрессивно увеличивается количество слагаемых в формуле, поэтому при $n>6$ целесообразнее вычислять площади по приращениям координат или по координатам вершин многоугольника.

Для определения площадей небольших участков на карте или плане часто используют палетку – лист прозрачной бумаги (кальки), на котором нанесена сетка квадратов (рис. 30, а) или параллельных линий (рис. 30, б), проведенных преимущественно через 2 мм одна от другой. Квадратную палетку накладывают на участки и подсчитывают, сколько квадратов содержится в данном участке; неполные квадраты считают отдельно, преводя потом их



а) б)

Рис. 30

сумму в полные квадраты. Площадь участка вычисляют по формуле:

$$P = n(aM)^2, \qquad (2.22)$$

где a – сторона квадрата, M – знаменатель масштаба карты (плана), n – количество квадратов в участке.

Квадратной палеткой не рекомендуется определять площади, большие 2 см^2 на плане, т. к. относительная ошибка определения площади превышать 30%.

Для определения площади контура линейной палеткой накладывают ее на контур так, чтобы крайние точки *a* и *b* разместились посредине между параллельными линиями палетки. Таким образом, весь контур оказывается расчлененным параллельными линиями на трапеции с одинаковыми высотами *h*, при этом отрезки параллельных линий внутри контура являются средними линиями трапеций. Прерывистыми линиями на рис. 31, б показаны основания трапеций. Сумма площадей трапеций, то есть площадь контура, равна

$$P = (ab + cd + ... + kl + mn)h.$$

Точность однократного определения площади *P(га)* квадратной или параллельной палетками характеризуется эмпирической формулой

$$m_{P(га)} = 0.025M\sqrt{P_{(га)}}/10\,000,$$

где $m_{(га)}$ − средняя квадратическая ошибка измерения (см. раздел 3), *M* – знаменатель численного масштаба карты (плана).

2.9.2 Аналитический способ

При наличии прямоугольных координат *X* и *Y* вершин нанесенного на карту или план многоугольника его площадь можно вычислить по формулам аналитической геометрии. Выведем одну из таких формул на примере пятиугольника.

Пусть в пятиугольнике *12345* (рис. 31) координаты вершин равны $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5$. Из вершин треугольника опустим перпендикуляры на ось ординат. Площадь пятиугольника *12345* будет равна сумме площадей трех трапеций (I, II, III) за вычетом площади трапеций IV и V:

$$P = P_1 + P_{II} + P_{III} - P_{IV} - P_{V.}$$

Площадь каждой трапеции равна

$$P_1 = 0.5(x_1 + x_2)(y_2 - y_1), \quad P_{II} = 0.5(x_2 + x_3)(y_3 - y_2),$$
$$P_{III} = 0.5(x_3 + x_4)(y_4 - y_3), \quad P_{IV} = 0.5(x_4 + x_5)(y_5 - y_4),$$
$$P_V = (x_{IV} + x_V)(y_V - y_{IV})$$

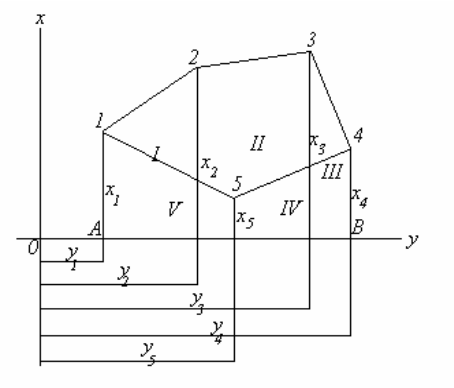


Рис. 31

Чтобы избавиться от множителя 0.5, будем вычислять удвоенную площадь пятиугольника. В сумме вышеприведенных выражений видна законно-мерность, заключающаяся в том, что удвоенная площадь полигона равна сумме произведений, у которых один сомножитель – сумма абсцисс соседних точек, другой – разность ординат этих точек. В сокращенном виде удвоенную площадь *n*-угольника можно написать в следующем виде:

$$2P = \sum_{i=1}^{n}(x_k + x_{k+1})(y_{k+1} - y_k). \qquad (2.23)$$

Формула (2.23) пригодна для вычисления площади любого многоугольника с точностью, характеризуемой средней квадратической ошибкой

$$m_P = P\sqrt{2n}/c,$$

где c − знаменатель относительной погрешности измерений.

2.9.3. Механический способ

Механический способ определения площади – это измерение на плане или карте площади участка с произвольными границами при помощи специального прибора – планиметра.

а) Устройство полярного планиметра. Полярный компенсационный планиметр состоит из двух рычагов – полюсного R_1 и обводного R (рис. 32), соединенных шарниром в точке b: $bK = r$. Во время обвода конец полюсного рычага O, называемый полюсом, неподвижен и вокруг него вращается планиметр.

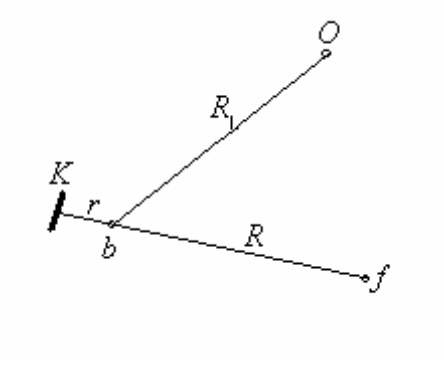


Рис. 32

Полюс *O* крепится к бумаге посредством иглы и грузика. Поверхность счетного ролика К, вращающегося во время обвода, разделена на 100 частей. Десятые доли каждой части, называемые делением планиметра, отсчитываются по верньеру. Таким образом, деление равно 1:1 000 длины окружности счетного ролика. Для учета числа оборотов счетного ролика имеется циферблат, который вращается при помощи бесконечного винта, находящегося на оси счетного ролика. Если счетный ролик сделает 10 оборотов (обернется на 10 000 делений), то циферблат сделает один оборот. Отсчет состоит из четырех цифр. Первую цифру – тысячи делений – отсчитывают по циферблату, вторую и третью цифры – сотни и десятки делений – отсчитывают по штрихам на счетном ролике, четвертую – единицы делений – отсчитывают по верньеру.

Верньер - одно из простейших отсчетных приспособлений. Его строят следующим образом: отрезок в *n* делений шкалы рабочей меры (основной шкалы) переносят на прилегающую поверхность и делят его на *(n+1)* равных частей, получим шкалу верньера (рис. 33).

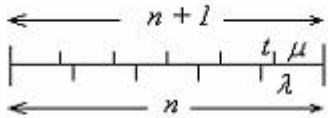


Рис. 33

Обозначим через λ цену деления основной шкалы и через μ – цену деления верньера. Точностью верньера называют

$$t = \lambda - \mu. \qquad (а)$$

По построению $\lambda n = \mu(n + 1)$, поэтому

$$\mu = \lambda n/(n+1).$$

Подставив это выражение в формулу (а), получим

$$t = \lambda/(n+1),$$

то есть точность верньера равна цене деления основной шкалы, деленной на число делений верньера.

Роль отсчетного индекса в верньере выполняет его нулевой штрих. Если он совмещен с каким либо штрихом основной шкалы, то отсчет по основной шкале равен значению этого штриха. Все остальные штрихи верньера не совпадают со штрихами основной шкалы: первый − на величину $\lambda - \mu = t$, второй штрих верньера отстоит от ближайшего штриха основной шкалы на $2t$ и т.д. Если сместить верньер на величину kt, то со штрихом основной шкалы совпадет k-й штрих верньера, поэтому формула отсчета по верньеру имеет вид

$$N = N_{мл} + kt,$$

где $N_{мл}$ – отсчет по младшему штриху основной шкалы; k – номер штриха верньера, совпавшего со штрихом основной шкалы; t – точность верньера.

Измерение площади сводится к обводу по контуру участка на карте обводной точкой f; при этом вследствие трения о бумагу счетное колесо вращается. До обвода контура и после обвода берутся отсчеты n_1 и n_2. Площадь участка вычисляется по формуле

$$P = c(n_2 - n_1), \qquad (2.24)$$

где c – цена деления планиметра.

Для сцепления счетного ролика с бумагой на его ободке параллельно оси ролика нанесены мелкие рубчики – рифельные штрихи. Для правильной работы планиметра требуется выполнение основного геометрического условия – направление рифельных штрихов на ободке счетного ролика должно быть параллельно оси обводного рычага. Если рифельные штрихи нанесены перпендикулярно плоскости счетного ролика, то плоскость счетного ролика должна быть перпендикулярной оси обводного рычага.

б) Теория полярного планиметра. При обводе фигры обводной рычаг и счетный ролик имеют четыре движения: 1) если счетный ролик движется в плоскости перпендикулярно направлению рифельных штрихов и оси обводног рычага (рис. 34, а), то он будет вращаться и обернется на дугу *l*, соответствующую пройденному пути *s*; 2) если счетный ролик движется по направлению рифельных штрихов и обводного рычага, то он не будет вращаться, а будет скользить и длина дуги, на которую он обернется, будет равна нулю независимо от пройденного пути (рис. 34, б); 3) если счетный ролик движется под углом к направлению рифельных штрихов (рис. 34, в), а следовательно, и к своей плоскости, то он будет вращаться и

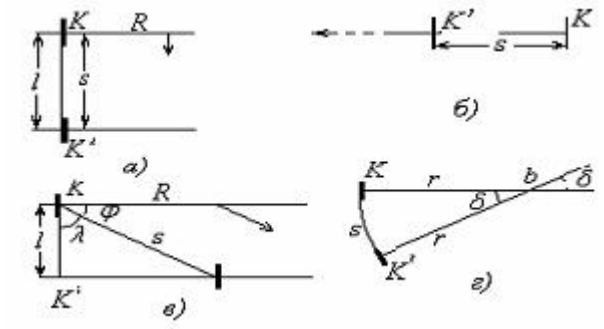


Рис. 34

скользить и, пройдя путь *s*, обернется на дугу *l*, представляющую собой катет прямоуголного треугольника, у которого гипотенуза равна s, при этом

$$l = s \cdot sin\varphi = s \cdot cos\lambda;$$

4) при вращении рычага вокруг точки *b* (оси вращения рычагов, рис. 34, г) счетный ролик, вращась и скользя по дуге $s = KK'$, обернется на дугу $l - r\delta$.

При измерении площади полюс планиметра может находится как внутри, так и вне контура фигуры. Рассмотрим первый случай – полюс внутри контура (рис. 35)

Введем обозначения: *R* – длина обводного рычага, R_1 – длина полюсного рычага, *r* – расстояние от счетного колеса до шарнира.

Пусть обводная точка *f* движется по контуру участка и в какой-то

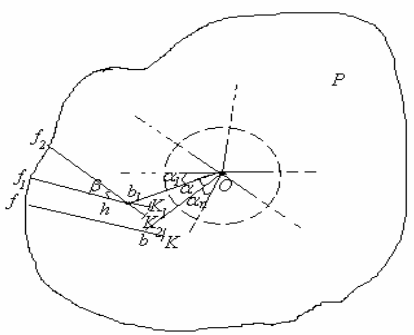


Рис. 35

момент занимает положение f_1. Через малый промежуток времени она займет положение f_2, а точка b переместится из положения b в положение b_1. За этот промежуток времени планиметр измерит площадь p_1 элементарного участка. Площадь p_1 можно представить как сумму площадей трех фигур: Rh− параллелограмма bb_1ff_1; $0.5bR_1^2$ − кругового сектора Obb_1 радиуса R_1; $0.5\beta R^2$ – кругового сектора $b_1f_1f_2$ радиуса R:

$$p = Rh + 0.5\alpha R_1^2 + 0.5\beta R^2 . \qquad (2.25)$$

Пусть за этот промежуток счетное колесо повернулось на дугу s. При движении обводного рычага параллельно самому себе счетное колесо вращается полностью, а при движении обводного рычага вдоль своей оси оно не вращается, а скользит по бумаге. Разобьем движение обводного рычага на два движения: параллельно самому себе – колесо повернется на дугу h_1; поворот вокруг точки b_1 на угол β – колесо повернется на дугу $r\beta$ в обратном направлении. Поэтому $s_1 = h_1 - r\beta_1$, откуда $h_1 = s_1 + rb_1$.

Подставив последнее выражение в формулу (2.25), получим:

$$p = Rs + Rr\beta + 0.5\alpha R_1^2 + 0.5\beta R^2.$$

Сложив площади элементарных участков p_i, получим площадь всего измеряемого участка:

$$P = \sum_1^n p_i = R\sum_1^n s_i + Rr\sum_1^n b_i + 0.5R_i^2\sum_1^n \alpha_i + 0.5R^2\sum_1^n \beta_i \qquad (2.26)$$

Сумма Σs_i выражает дугу, на которую повернулось счетное колесо при обводе всего участка; она равна произведению разности

конечного и начального отсчетов по счетному колесу на длину дуги l, соответствующей одному делению счетного колеса:

$$\Sigma s_i = l(n_2 - n_1).$$

Полюсный рычаг повернется на угол 360° ($\Sigma\alpha_i = 2\pi$), обводной рычаг повернется также на угол 360° ($\Sigma\beta_i = 2\pi$). Таким образом,

$$P = Rl(n_2 - n_1) + \pi(R_1^2 + R^2 + 2Rr). \qquad (2.27)$$

Введя обозначения $Rl = c$ и $\pi(R_1^2 + R^2 + 2Rr) = Q$, запишем:

$$P = c(n_2 - n_1) + Q. \qquad (2.28)$$

Постоянная c называется ценой деления планиметра, постоянная Q – постоянным числом планиметра.

Во втором случае, когда полюс находится вне контура, при полном обводе контура $\Sigma\alpha = 0$, *и* $\Sigma\beta = 0$, поэтому

$$P = c(n_2 - n_1). \qquad (2.29)$$

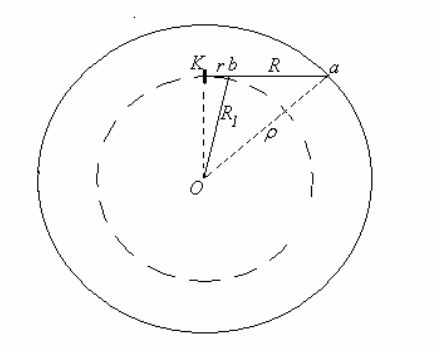


Рис. 36

в) Геометрический смысл постоянных планиметра.. Цена деления планиметра c равна площади прямоугольника со сторонами l и R. Постоянное планиметра Q равно площади круга радиусом $\rho = (R_1^2 + R^2 + 2Rr)^{0.5}$; этот круг называется основным кругом планиметра.

Если поставить планиметр так, чтобы плоскость счетного колеса проходила бы через полюс O и, сохраняя это положение,обвести круг радиусом ρ, то площадь этого круга будет равна (рис. 36)

$$\pi\rho^2 = \pi[(OK)^2 + (r + R)^2]. \qquad (2.30)$$

Из треугольника OKb выразим $(OK)^2 = R_1^2 - r^2$ и, подставив это значение в формулу (2.30), получим

$$\pi\rho^2 = (R_1^2+R^2+2Rr)^2+Q.$$

Цену деления планиметра определяют по формуле

$$c = P/(n_2 - n_1),$$

где n_1 и n_2 − начальный и конечный отсчеты при обводе контура с известной площадью, располагая полюс вне контура.

До начала измерения площади следует проверить следующие два требования, предъявляемые к планиметру:

1) счетное колесико должно свободно вращаться, зазор между шкалой колесика и верньером должен быть равен толщине листа папиросной бумаги и в случае несоблюдения этого условия регулируется исправительными винтами;

2) плоскость ободка счетного колесика должна быть препендикулярна оси обводного рычага (линии, соединяющей острие обводного шпиля f с точкой шарнирного соединения рычагов b). Поверка выполняется двумя обводами площади контура: при положении счетного механизма слева и справа.

Точность измерения площади планиметром зависит от масштаба плана или карты, конфигурации, размеров участка и от положения рычагов в процессе обвода (угол между рычагами). Лучшие результаты получают по картам (планам) крупных масштабов. Не следует допускать измерения планиметром площадей узких и вытянутых участков, размеры которых на карте менее 15 см^2. Площади мелких и протяженных участков целесообразнее измерять палетками.

Исследования показали, что относительная средняя квадратическая ошибка измерения площади с помощью планиметра составляет 1:400. Если полученные значения площади в делениях планиметра расходятся между собой на величину, большую 1:200 от среднего арифметического из них, то измерения площадей следует производить при двух обводах и брать среднее значение. Можно

выполнить юстировку планиметра − разворотом оси счетного колесика, после чего поверку повторяют.

В настоящее время появились электронные (цифровые) планиметры. Фирма «Topcon» предлагает несколько моделей цифровых планиметров, позволяющих проводить измерения площадей по картам с точностью ±0.2%. При помощи ЭВМ измерение площадей может быть полностью автоматизировано.

При определении площадей по плану графическим или механическим способом (с помощью палеток или планиметра) необходимо учитывать деформацию бумаги (плана). Величина деформации храктеризуется коэффициентом q, определяемым в двух взаимно перпендикулярных направлениях по формуле

$$q = (L_0 - L)/L_0, \qquad (2.31)$$

где L_0 − теоретическая длина линии, значаящаяся на плане (например, длина стороны квадрата координатной сетки), L − результат измерений этой линии по плану.

2.9.4. Редуцирование площадей

Термин «редуцирование» означает приведение измеренного значения площади к какой-либо поверхности (плоскости, эллипсоида и др.) путем введения специальных поправок.

Если для определения площадей используются пункты государственной геодезической сети, то полученные площади чаще всего имеют несколько преуменьшенное значение, потому что координаты пунктов относятся не к поверхности Земли, а к поверхности референц-эллипсоида. Переход от площади P_0 на поверхности референц-эллипсоида к площади P на поверхности Земли на высоте H (редуцирование) выполняется по формуле

$$P = P_0(1 + 2H/R), \qquad (2.32)$$

где R − радиус Земли, раавныый 6370 км.

Использование координат пунктов на планах (картах) в проекции Гаусса −− Крюгера приводит к тому, что площади участков и размеры линейных элементов получаются всегда больше их горизонталь-

ных проекций. Это увеличение возрастает по мере удаления от осевого меридиана зоны. Для приведения площади к горизонтальной проекции используется формула

$$P = P_{пр}[1 - (Y_m/R)^2], \qquad (2.33)$$

где Y_m − средняя ордината (расстояние от осевого меридиана зоны до середины участка).

Иногда возникает необходимость получения площадей физической (топографической) поверхности участка $P_ф$, которая тем больше отличается от площади горизонтального проложения участка $P_{гп}$, чем больше угол наклона ν или уклон i местности. Для получения площади физической поверхности участка его разбивают на части с одинаковыми скатами, т. е. равностоящими и более или менее прямыми горизонталями. На каждой из этих частей в перпендикулярном направлении к горизонталям определяют угол наклона или уклон и вычисляют площадь $P_ф$ на физической поверхности Земли по формулам

$$P_ф = P_{гп}(1 + \nu^2/2\rho^2), \qquad (2.34)$$

$$P_ф = P_{гп}(1 + i^2/2\rho^2). \qquad (2.35)$$

Например, при угле наклона $\nu = 2.9^\circ$ (уклон $i = 0.05$) поправка составит 1:800, или 12,5 м^2 на 1 га.

Требования к точности определения площади земельных участков зависят от многих факторов: хозяйственной значимости, местоположения, экологической обстановки, наличия и ценности недвижимости. Достижение требуемой точности возможно лишь при правильном выборе способа определения площади участка. Наивысшая точность может быть достигнута при аналитическом способе определения площади: площадь участка определяется по результатам измерений на местности и ошибки в определении площади будут зависеть от ошибок этих измерений. Это показано в п. «3.11. Примеры практического приложения теории ошибок».

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Основными задачами теории ошибок являются:

1 − изучение видов и свойств ошибок измерений;

2 − установление критериев для оценки точности результатов измерений;

3 − из ряда измерений одной и той же величины получить наиболее надежное значение и оценить его;

4 − оценка точности функции измеренных величин.

3.1. Измерения величин

Измерить величину – значит найти отношение этой величины к другой однородной ей величине, принятой за единицу измерения. Полученному в результате измерения числу приписывается наименование, соответствующее названию единицы измерения.

Результаты измерений называют также измеренными величинами или кратко просто измерениями.

Значение величины можно получить непосредственно путем наложения единицы измерений на измеряемую величину (или наоборот) и счета числа уложенных единиц и долей единицы. Такие измерения называют прямыми, или непосредственными. Примеры таких измерений – измерение на плане линий циркулем, углов − транспортиром.

В некоторых случаях значение величины можно получить иначе. Например, если измерить два угла треугольника и получить их значения α и β, то третий угол γ можно вычислить по известной формуле

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta.$$

В этом примере значение величины получено не прямо, а косвенно, посредством вычисления на основании математической зависимости между определяемой величиной и непосредственно измеренными величинами. Такие (вычисленные) значения называют косвенными, или посредственными измерениями.

Для контроля и повышения точности окончательного результата в геодезической практике одну и ту же величину измеряют не менее двух раз. Так как для определения значения величины достаточно одного измерения, то при n измерениях одной и той же величины все ее измерения, кроме одного (т.е. *n-1* измерений), называют избыточными , или добавочными.

Кроме значения величины, полученного из измерений, очень важно знать точность этих измерений. Точность измерений зависит от точности приборов, которыми выполняются измерения, и определяется условиями, в которых они выполняются. Измерения, полученные в одинаковых условиях, имеют одинаковую точность. Условия считаются одинаковыми, если измерения проведены одним и тем же прибором (или приборами одной точности), одним и тем же лицом или лицами с одинаковым опытом, одними и теми же методами и при одинаковых внешних условиях. Измерения, полученные с равной точностью, называются равноточными. В противном случае они называются неравноточными.

3.2. Ошибки измерений и их виды

Измерить величину абсолютно точно невозможно: как бы тщательно не производились измерения, результаты их почти всегда отличаются от точного (или истинного) значения величины. Только случайно может оказаться, что измеренное значение в точности совпадает с истинным значением величины.

Отклонение результата измерения величины от ее точного значения называется истинной ошибкой измерения и выражается формулой

$$\Delta = \ell - X, \qquad (3.1)$$

где Δ − истинная ошибка измерения, ℓ - результат измерения, X - точное (истинное) значение величины.

О наличии ошибок измерений можно судить хотя бы по тому факту, что повторные измерения одной и той же величины дают, как правило, различные значения. Причины ошибок измерений – несовершенство органов чувств человека, неточность измерительных инструментов, влияние внешних условий и др.

Ошибка измерений является обычно результатом совместного действия нескольких различных причин, поэтому ее можно рассматривать как алгебраическую сумму

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_n ,$$

в которой каждое слагаемое есть следствие влияния какого-либо одного фактора.

К ошибкам измерений относятся и грубые ошибки, т.е. промахи и просчеты, причина возникновения которых – невнимательность исполнителя. Грубые ошибки могут быть выявлены контрольными измерениями. Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, заменяются новыми.

По различию в свойствах ошибки делят на системтические и случайные.

Систематические ошибки это в основном такие ошибки, которые при повторных измерениях одной и той же величины или при измерении однородных величин появляются с одним и тем же знаком. Например, если при измерении углов большого числа треугольников все невязки оказались отрицательными, то можно быть уверенным, что измеренные углы содержат одну и ту же систематическую ошибку или несколько таких ошибок.

Систематические ошибки бывают постоянные и переменные. Примером постоянной ошибки может служить ошибка в результатах измерения длины линии из-за неточного определения длины мерной ленты. К переменным систематическим ошибкам в результатах измерения одной и той же линии мерной лентой относятся следующие ошибки: из-за прогиба ленты вследствие неровностей почвы, из-за провиса ленты, из-за отклонения ленты от створа измеряемой линии.

Перечисленные систематические ошибки возникают по различным причинам. Одни из них зависят от несовершенства или неточной юстировки мерного инструмента (инструментальные ошибки), другие – от состояния внешней среды (ошибки среды, или внешние ошибки), от наблюдателя (личные ошибки).

Случайными называют ошибки, не связанные функциональной зависимостью с какими-либо факторами и математические ожидания которых равны нулю.

Математическим ожиданием ошибки называется сумма произведений возможных значений ошибок на соответствующие вероятности, т. е.

$$M(\Delta) = \Delta_1 P_1 + \Delta_2 P_2 + \ldots + \Delta_n P_n , \qquad (3.2)$$

где Δ_1, Δ_2 , …, Δ_n − различные значения ошибки, возникающей при данных условиях измерений, а P_1, P_2, …, P_n − соответствующие им вероятности. Вероятностью называется величина, постоянная для конкретных условий измерений, к которым стремится частость появления ошибок. Под частостью появления ошибки понимается отношение числа ошибок одинакового размера к числу всех ошибок в данном ряду и определяется по формуле

$$q = k/n, \qquad (3.3)$$

где k – число ошибок одинакового размера, n – общее число ошибок в ряду измерений. Если вероятности неизвестны, то, заменяя их в формуле (3.2) соответствующими им частостями, получим приближенное равенство

$$M(\Delta) \approx \Delta_1 q_1 + \Delta_2 q_2 + \ldots + \Delta_n q_n .$$

Отсутствие функциональной зависимости ошибки от какого-либо фактора выражается практически в том, что появление ошибки в ряду в той последовательности, которая имеет место в каждом конкретном случае, не подчиняется никакой видимой закономерности; иными словами, знак и размер ошибки в ряду не зависит от знака и размера остальных ошибок полученного ряда измерений. Равенство нулю математического ожидания ошибки измерения какой-либо величины практически проявляется в том, что при неограниченном увеличении числа измерений этой величины среднее арифметическое из полученных значений ошибки имеет тенденцию стремиться к нулю.

Случайные ошибки измерений обладают следующими свойствами:

1 − положительные ошибки встречаются примерно так же часто, как и равные им по абсолютной величине отрицательные ошибки;

2 − чем больше ошибка по абсолютной величине, тем реже она встречается;

3 − абсолютная величина ошибки не превосходит определенного предела;

4 − среднее арифметическое из ошибок при неограниченом увеличении числа измерений в ряду имеет тенденцию стремиться к нулю.

3.3. Арифметическая средина и ее свойства

Измерение одной и той же величины при геодезических работах обычно производят не менее двух раз и за окончательное значение в случае равноточных измерений берут среднее арифметическое, называемое иначе арифметической срединой, которое является более надежным, чем одно измерение.

Если результаты равноточных измерений одной и той же величины представить в буквенном виде $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$, то формула арифметической средины имеет вид

$$L = (\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n)/n = [\ell]/n . \qquad (3.4)$$

Для упрощения вычисления арифметической средины вводят приближенное значение ℓ_0 измеряемой величины. Выведем формулу вычисления арифметической средины через приближенное значение ℓ_o. Обозначим

$$\ell_i - \ell_o = \delta\ell , \quad i = 1, 2, \ldots, n..$$

На основании этих равенств можно написать

$$\ell_i = \ell_o + \delta\ell_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.5)$$

Подставив (3.5) в (3.4), получим

$$L = (\ell_o + \delta\ell_1 + \ell_o + \delta\ell_2 + \ldots + \ell_o + \delta\ell_n)/n = (n\ell_o + [\delta\ell])/n ,$$

$$L = \ell_o + [\delta\ell]/n\,. \qquad (3.6)$$

Свойство арифметической средины: при увеличении числа равноточных измерений одной и той же величины их среднее арифметическое стремится к точному (истинному) значению этой величины. Доказать это свойство можно следующим образом.

Пусть X – точное значение измеряемой величины. На основании определения истинной ошибки можно написать:

$$\Delta_i = \ell_i - X, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Сложив почленно эти равенства и разделив на n, получим

$$[\Delta]/n = [\ell]/n - X$$

или

$$[\Delta]/n = L - X. \qquad (3.7)$$

Из равенства (3.7) следует, что величина [Δ]/n является ошибкой арифметической средины. По свойству случайных ошибок она при увеличении числа измерений стремится к нулю. Имея это в виду, на основании равенства (6) можно заключить, что арифметическая средина при увеличении числа измерений стремится к точному значению X. Поэтому среднее арифметическое значение из ряда равноточных измерений одной и той же величины является более надежным значением этой величины.

3.4. Средняя квадратическая ошибка

Произведя равноточные измерения, необходимо определить степень их надежности – оценить их точность, для чего применяются различные числовые характеристики. Одной из таких характеристик является средняя квадратическая ошибка измерения, определяемая по предложенной К. Ф. Гауссом формуле

$$m = \sqrt{[\Delta\Delta]/n}\,, \qquad (3.8)$$

где Δ - случайные ошибки измерений.

Следует понять, что средняя квадратическая ошибка, как и другие числовые характеристики, не ошибка какого-либо измерения, а средняя квадратическая величина таких ошибок.

Характеризовать точность измерений может также предельная ошибка. За предельную ошибку обычно принимают утроенное значение средней квадратической ошибки:

$$\Delta = 3m . \qquad (3.9)$$

Эта величина принята в качестве предельной потому, что при нормальном распределении вероятность появления ошибки больше, чем 3m, равна всего 0.003, т.е. в среднем из тысячи ошибок равноточных измерений только три превосходят этот предел.

Иногда в качестве предельной ошибки принимают величину, равную $2m$. В этом случае вероятность появления ошибки больше предельной равна 0.05, т.е. в среднем пять ошибок из ста превосходят предельную ошибку.

Средняя квадратическая и предельная ошибки, которые являются абсолютными, не всегда могут характеризовать точность измерений. Если, например, известно, что измерена линия с предельной ошибкой, равной 1 см, то еще нельзя сказать о том, точно выполнено измерение или грубо. Ответ зависит от длины измеряемой линии. В таких случаях судят по относительной ошибке, равной отношению абсолютной ошибки к измеренной величине, т. е

$$\delta = 3m/L .$$

3.5. Средние квадратические ошибки функций измеренных величин

Часто бывает необходимым определить среднюю квадратическую ошибку (СКО) величины, которая сама не измерялась, а является функцией других измеренных величин, средние квадратические ошибки которых известны. Например, определить СКО площади треугольника, для которого из измерений получены две его стороны и угол между ними и известны их

средние квадратические ощибки, то есть определить среднюю квадратическую ошибку функции

$$P = 0.5bc\sin A.$$

Такие задачи легко решаются по готовым формулам, которые выводятся для определенных типов функций. Решение задачи зависит от типа функции и от того, независимы или зависимы между собой известные аргументы.

Ниже приводится вывод формул оценки точности некоторых функций независимых между собой измерений. Применение этих формул для функций зависимых измерений дает только грубо приближенный результат, а иногда даже совершенно неверный.

Линейные функции

1. Дана функция

$$u = kx + C, \qquad (3.10)$$

где x – измеренное значение аргумента, u – вычисленное значение функции, k и C - постоянные величины.

Если в равенство (3.10) вместо измеренного подставить точное значение X, получим точное значение функции

$$U = kX + C. \qquad (3.11)$$

Вычитая равенство (3.11) из (3.10) и учитывая (3.2), найдем зависимость между ошибками функции и аргумента

$$\Delta u = k\Delta x. \qquad (3.12)$$

Для того, чтобы найти выражение средней квадратической ошибки функции через среднюю квадратическую ошибку аргумента, предположим, что проведено n измерений величины x и получено n соотношений вида (3.12). Возведем левые и правые части этих равенств в квадрат, сложим соответствующие части последних равенств и разделим полученные суммы на n:

$$[\Delta u^2]/n = k^2[\Delta x^2]/n.. \qquad (3.13)$$

Так как средняя квадратическая ошибка определяется по формуле (3.8), то $[\Delta u^2]/n$ и $[\Delta x^2]/n$ представляют собой квадраты средних квадратических ошибок функции и аргумента. Обозначив их через m_u и m_x соответственно, можем написать:

$$m_u = km_x. \qquad (3.14)$$

2. Дана функция

$$u = k_1 x + k_2 y + C. \qquad (3.15)$$

При точных значениях аргументов для этой функции имеем

$$U = k_1X + k_2Y + C. \qquad (3.16)$$

Вычитая члены равенства (3.16) из соответствующих членов равенства (3.15), получим:

$$\Delta u = k_1\Delta x + k_2\Delta y. \qquad (3.17)$$

Имея n измерений, можно написать n таких равенств. Возведя левые и правые части этих равенств в квадрат, сложив их и разделив на n, получим:

$$[\Delta u^2]/n = k_1^2[\Delta x^2]/n + k_2^2[\Delta y^2]/n + 2k_1k_2[\Delta x\Delta y]/n. \qquad (3.18)$$

Величины $[\Delta u^2]/n$, $[\Delta x^2]/n$, $[\Delta y^2]/n$ являются квадратами средней квадратической ошибки, а величина $[\Delta x\Delta y]/n$ при увеличении числа измерений стремится к нулю. Считая число измерений большим, отбросим по малости последний член в равенстве (3.18), после чего, обозначив входящие в это равенство средние квадратические ошибки буквами m, m_1 и m_2, можем написать

$$m_u^2 = k_1^2m_x^2 + k_2^2m_y^2 . \qquad (3.19)$$

3. Дана функция

$$u = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + \ldots + k_nx_n + C. \qquad (3.20)$$

Поступая аналогично предыдущему, можно получить зависимости между ошибками функции и аргументов и их средними квадратическими ошибками

$$m_u^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \ldots + k_n^2 m_n^2. \qquad (3.21)$$

В частности, если

$$u = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots \pm x_n + C, \qquad (3.22)$$

то

$$m_u^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \ldots + m_n^2. \qquad (3.23)$$

Если измерения равноточны, то есть $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_n = m$, то

$$m_u = m\sqrt{n}. \qquad (3.24)$$

Функция общего вида

Дана функция

$$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n). \qquad (3.25)$$

После выражения в равенстве (3.25) величин u, x_1, x_2,…x_n соответствующими им точными значениями и ошибками, можно записать:

$$U + \Delta u = f(X_1 + \Delta x_1,\ X_2 + \Delta x_2, \ldots,\ X_n + \Delta x_n). \qquad (3.26)$$

Разложив правую часть последнего равенства в ряд Тейлора и отбросив по малости члены второй степени и выше, получим:

$$U + \Delta u = f(X_1, X_2 \ldots, X_n) + (\partial f/\partial x_1)\Delta x_1 + (\partial f/\partial x_2)\Delta x_2 + \ldots + (\partial f/\partial x_n)\Delta x_n. \qquad (3.27)$$

Учитывая, что $U = f(X_1, X_2, \ldots X_n)$, находим:

$$\Delta u = (\partial f/\partial x_1)\Delta x_1 + (\partial f/\partial x_2)\Delta x_2 + \ldots + (\partial f/\partial x_n)\Delta x_n,, \qquad (3.28)$$

т. е. ошибка функции в общем виде равна полному дифференциалу этой функции.

Переход от равенства (3.25) к равенству (3.28) называют приведением функции (3.25) к линейному виду (линеаризация функции).

Так как коэффициенты $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2$, …, $\partial f/\partial x_n$ в равенстве (3.28) – постоянные величины, то в этом случае зависимость между ошибками та же, что и в равенстве (3.21), а следовательно, для средних квадратических ошибок будет справедлива формула (3.22), в которой вместо k_1, k_2, …, k_n здесь будут $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2$, …, $\partial f/\partial x_n$, т.е.

$$m_u^2 = (\partial f/\partial x_1)^2 m_1^2 + (\partial f/\partial x_2)^2 m_2^2 + \ldots (\partial f/\partial x_n)^2 m_n^2. \qquad (3.29)$$

3.6. Средняя квадратическая ошибка арифметической средины

Арифметическую средину можно представить в виде:

$$L = [\ell]/n = (1/n)\ell_1 + (1/n)\ell_2 + \ldots + (1/n)\ell_n..$$

Отсюда видно, что она является линейной функцией отдельных измерений. Применяя к ней формулу (2.21), можно написать:

$$M^2 = (1/n)^2 m_1^2 + (1/n)^2 m_2^2 + \ldots + (1/n)^2 m_n^2.$$

Так как все измерения равноточны, то есть $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$, то

$$M^2 = n(1/n)^2 m^2 = m^2/n$$

или

$$M = m/\sqrt{n}.. \qquad (3.30)$$

Следовательно, средняя квадратическая ошибка арифметической средины n равноточных измерений в $\sqrt{n}$ раз меньше средней квадратической ошибки одного измерения.

3.7. Вероятнейшие поправки и их свойства

Вероятнейшей поправкой в случае равноточных измерений называется разность между арифметической срединой, являющейся вероятнейшим (наиболее надежным) значением, и отдельным результатом измерения, т. е.

$$\upsilon = L - \ell. \qquad (3.31)$$

Если арифметическая средина получена из n измерений, то можно написать n равенств вида (3.31). Сложив соответствующие части этих равенств, получим

$$[\upsilon] = nL - [\ell]. \qquad (3.32)$$

Подставив вместо L его выражение L=[l]/n , найдем, что

$$[\upsilon] = 0. \qquad (3.33)$$

Это равенство выражает свойство вероятнейших поправок равноточных измерений. Оно служит контролем правильности вычисления арифметической средины

3.8. Выражение средней квадратической ошибки через вероятнейшие поправки

В большинстве случаев точное значение измерений величины неизвестно, вследствие чего неизвестны и ошибки измерений. В этих случаях для определения средней квадратической ошибки используются вероятнейшие поправки (или ошибки).

Допустим, что произведен ряд равноточных измерений одной и той же величины, точное значение которой X, а вероятнейшее - L . Известно, что

$$\Delta_i = \ell_i - X,$$
$$\upsilon_i = L - \ell_i .$$

На основании этого

$$\Delta_i + \upsilon_i = L - X .$$

Обозначив ошибку арифметической средины, равную $L - X$, через $\delta = \Delta_i + \upsilon_i$, можно записать

$$\Delta_i = \delta - \upsilon_i.. \qquad (3.34)$$

Для ряда из n измерений будет столько же равенств вида (3.34).

Возведем в квадрат левые и правые части этих равенств и сложим:

$$[\Delta^2] = n\delta^2 - 2\delta[\upsilon] + [\upsilon^2].$$

По свойству вероятнейших поправок $[\upsilon] = 0$, Поэтому, разделив все члены последнего равенства на n, получим

$$[\Delta^2]/n = \delta^2 + [\upsilon^2]/n$$

или

$$m^2 = \delta^2 + [\upsilon^2]/n.$$

В этом равенстве две неизвестные величины m и δ. Истинную ошибку арифметической средины δ можно заменить соответствующей ей средней квадратической ошибкой этой средины $M^2 = m^2/n$, после чего получим

$$m^2 = m^2/n + [\upsilon^2]/n..$$

Решив это равенство относительно m, получим

$$m = \sqrt{[\upsilon^2]/(n-1)}\,. \qquad (3.35)$$

Подставив выражение для m из равенства (3.35) в формулу $M = m/\sqrt{n}$, найдем

$$M = \sqrt{[\upsilon^2]/n(n-1)}. \qquad (3.36)$$

Таким образом, формула (2.35) позволяет вычислить среднюю квадратическую ошибку по вероятнейшим поправкам (ошибкам) ряда измерений одной и той же величины.

3.9. Определение средней квадратической ошибки одного измерения по разностям двойных равноточных измерений

Если каждая величина измерена дважды и все измерения равноточны (например, измерения превышений по черным и красным сторонам рейки при геометрическом нивелировании), то среднюю квадратическую ошибку одного измерения можно определить по разностям, полученным для каждой пары этих измерений, следующим образом.

Пусть имеется ряд двойных равноточных измерений

$$\ell'_1, \quad \ell_2''$$
$$\ell'_1, \quad \ell_2''$$
$$\dots$$
$$\ell'_n, \quad \ell''_n.$$

Найдем разности

$$d_1 = \ell'_1 - \ell''_1$$
$$d_2 = \ell'_2 - \ell''_2$$
$$d_3 = \ell'_3 - \ell''_3$$
$$\dots$$
$$d_n = \ell'_n - \ell''_n.$$

При безошибочном измерении эти разности должны равняться нулю (их теоретическое значение). В действительности полученные разности d_i представляют собой измеренные значения некоторой величины, равной нулю. Поэтому ошибка этих разностей (как разности между измерениями и истинными значениями) будут

$$\Delta d_1 = d_1 - 0 = d_1,$$
$$\Delta d_2 = d_2 - 0 = d_2,$$
$$\dots$$
$$\Delta d_n = d_n - 0 = d_n,$$

т. е. ошибки разностей d_i равны самим разностям.

Средняя квадратическая ошибка одной разности вычисляется по формуле

$$m_d = \sqrt{[\Delta d^2]/n},$$

а так как $\Delta d_i = d_i$, то получим

$$m_d = \sqrt{[d^2]/n}\,. \qquad (3.37)$$

Разность d_i есть функция двух равноточных измерений $d_i = \ell'_i - \ell''_i$, поэтому

$$m_d = m\sqrt{n},$$

где m – средняя квадратическая ошибка одного измерения. Отсюда

$$m = m_d/\sqrt{2}.$$

Подставив в это равенство вместо m_d его выражение (3.35), получим

$$m = \sqrt{[d^2]/2n}. \qquad (3.38)$$

Формула (3.38) дает возможность вычислить среднюю квадратическую ошибку одного измерения по разностям двойных измерений, если в разностях нет систематических ошибок. В противном случае ее следует определить и исключить из разности.

Систематическую ошибку в разности можно достаточно точно определить при большом числе измерений по формуле

$$\theta = [d]/n\,, \qquad (3.39)$$

т. е. как среднее арифметическое значение разностей.

Исключив систематическую ошибку из разностей d_i, найдем

$$\partial_i = d_i - \theta.$$

Величины ∂_i следует считать вероятнейшими ошибками на основании того, что они получены в результате образования разностей измеренных значений d_i и среднего арифметического значения θ. Подставив в формулу $m = \sqrt{[\upsilon 2]/(n-1)}$ вместо υ величины ∂, получим

$$m_d = \sqrt{[\partial^2]/(n-1)} \quad и \quad m = m_d/\sqrt{2} = \sqrt{[\partial^2]/2(n-1)}\,. \qquad (3.40)$$

Правильность вычисления значений θ и ∂ контролируют по формуле

$$[\partial] = 0, \qquad (3.41)$$

тождественной формуле $[\upsilon] = 0$.

3.10. Оценка точности результатов неравноточных измерений

Для определения наиболее надежного значения из ряда неравноточных измерений и оценки их точности вводят так называемые веса измерений, показывающие степень надежности выполненных измерений. Вес измерения определяется формулой

$$P = k/m^2\,. \qquad (3.42)$$

В формуле (3.42) числитель - произвольное число, которое должно быть одним и тем же при определении весов всех измерений, участвующих в решении какой-либо задачи; знаменатель - квадрат средней квадратической ошибки одного измерения.

Таким образом, вес измерения есть величина, обратно пропорциональная квадрату средней квадратической ошибки этого измерения.

Из определения веса следует, что чем более точно произведено измерение, тем больше его вес, и, наоборот, чем грубее измерение, тем меньше его вес. Так как числитель в формуле (3.40) – произвольное число, то все веса, участвующие при решении задачи, можно увеличить или уменьшить в одно и то же число раз. Это свойство весов показывает, что веса не абсолютные, а относительные характеристики точности измерений: по ним можно судить только о том, во сколько раз одно измерение точнее другого.

Пусть измерению ℓ_1 соответствуют средняя квадратическая ошибка m_1 и вес p_1, а измерению ℓ_2 – соответственно m_2 и p_2. Для этих измерений $p_1 = k/m_1^2$ и $p_2 = k/m_2^2$, откуда

$$p_1/p_2 = m_2^2/m_1^2 , \qquad (3.43)$$

т. е. веса двух измерений обратно пропорциональны квадратам их средних квадратических ошибок.

Если имеется n равноточных измерений, средняя квадратическая ошибка которых равна m, то средняя квадратическая ошибка арифметической средины будет $M = m/\sqrt{n}$. Примем вес одного измерения равным единице, тогда найдем вес арифметической средины из соотношения

$$P/1 = m^2/M^2.$$

Заменим M^2 через m^2/n , после сокращения получим

$$P = n. \qquad (3.44)$$

Следовательно, вес арифметической средины равен числу равноточных измерений, по которым она получена, если вес одного измерения принят равным единице.

Вероятнейшее значение величины из ряда неравноточных измерений $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ вычисляются по формуле общей арифметической средины

$$L_o = (\ell_1 p_1 + \ell_2 p_2 \ \ \ell_n p_n)/(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = [\ell p]/[p].$$

Эту формулу можно получить из формулы простой арифметической средины следующим образом.

Пусть имеем n групп равноточных измерений:

$\ell_{1\,1}, \ \ell_{12}, \ldots, \ell_{1p}$ с числом измерений p_1,

$\ell_{21}, \ \ell_{22}, \ldots, \ell_{2p}$ с числом измерений p_2,

. . .

$\ell_{n1}, \ \ell_{n2}, \ldots, \ \ell_{np}$ с числом измерений p_n.

Среднее арифметическое из этих измерений будет

$$L_o=(\ell_{11}+\ell_{12}+\ldots+\ell_{1p}+\ell_{21}+\ell_{22}+\ell_{2p}+\ldots+\ell_{n1}+\ell_{n2}+\ldots+\ell_{np})/(p_1+p_2+\ldots+p_n).$$

Для каждой группы измерений арифметическое среднее имеет вид

$$\ell_1 = (\ell_{11} + \ell_{12} + \ldots + \ell_{1p})/p_1,$$
$$\ell_2 = (\ell_{21} + \ell_{22} + \ldots + \ell_{2p})/p_2,$$
$$\ldots$$
$$\ell_n = (\ell_{n1} + \ell_{n2} + \ldots + \ell_{np})/p_n.$$

После несложных преобразований получим

$$L_o = (\ell_1 p_1 + \ell_2 p_2 + \ldots + \ell_n p_n)/(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = [\ell p]/[p]. \quad (3.45)$$

Вес арифметической средины равен числу равноточных измерений, по которым оно получено, поэтому можно сказать, что вес P_o величины L_o будет равен $[p]$. Следовательно, вес общей арифметической средины равен сумме весов, составляющих ее неравноточных измерений, т. е.

$$P_o = [p]. \quad (3.46)$$

Простая арифметическая средина – частный случай общей арифметической средины, когда все веса измерений равны между собой, то есть все измерения равноточны.

Поскольку средние квадратические ошибки неравноточных измерений различны, то для оценки точности таких измерений выбирают общую меру. Такой мерой является средняя квадратическая ошибка измерения, вес которого равен единице; сокращенно ее называют средней квадратической ошибкой единицы веса.

Пусть измерению с весом p соответствует средняя квадратическая ошибка m и измерению с весом единица соответствует средняя квадратическая ошибка μ. Так как веса обратно пропорциональны квадратам средних квадратических ошибок, то можно написать соотношение $p/1 = \mu^2/m^2$, откуда $\mu^2 = pm^2$.

Для ряда измерений $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$, которым соответствуют веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и средние квадратические ошибки $m_1, m_2, \ldots, m_n$, можно написать:

$$\mu^2 = p_1 m_1^2$$

$$\mu^2 = p_2 m_2^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mu^2 = p_n m_n^2$$

Сложив левые и правые части этих равенст и разделив суммы на n, получим

$$\mu = \sqrt{[pm^2]/n}. \qquad (3.47)$$

Средняя квадратическая ошибка общей арифметической средины равна

$$M_o = \mu/\sqrt{[p]}. \qquad (3.48)$$

Когда ошибки измерений неизвестны, а имеется ряд измерений ℓ_1, ℓ_2 …, ℓ_n с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то среднюю квадратическую ошибку единицы веса определяют по формуле

$$\mu = \sqrt{[pv^2]/(n-1)}. \qquad (3.49)$$

С учетом (3.49) средняя квадратическая ошибка общей арифметической средины имеет вид

$$M_o = \sqrt{[pv^2]/[p](n-1)}. \qquad (3.50)$$

Средняя квадратическая ошибка единицы веса по разностям двойных неравноточных измерений определяется по формулам:

$$\mu = \sqrt{[pd^2]/2n}, \qquad (3.51)$$

если в разностях нет систематической ошибки, и

$$\mu = \sqrt{[p\partial^2]/2(n-1)}, \qquad (3.52)$$

когда из разностей двойных измерений исключены систематические ошибки.

3.11. Примеры практического приложения теории ошибок

3.11.1. Точность положения контурных точек на планах (картах)

Использование различных приборов и технологических процессов, применяемых при съемках, приводит к неравноточности планов различных видов съемки. Однако при правильном проведении съемок ряд элементов, составляющих технологический процесс того или иного вида съемки, имеет ошибки, приравненные графической точности, например, ошибки нанесения точек и линий на план, построения углов на плане и др. Среднюю квадратическую ошибку определения контура на плане (карте) m_t можно получить по известной формуле

$$m_t = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + ... + m_n^2}, \qquad (3.53)$$

где $m_1 = m_2 = ... = m_n = 0.1$ мм (графическая точность определения положения точки на плане); при $n = 16$ $m_t = 0.4$ мм., что составит погрешность 4 м при съемке масштаба 1 : 10 000.

3.11.2. Точность изображения линий на плане

Для получения зависимости ошибки расстояния между точками от ошибки их положения представим, что каждая из конечных точек определяется координатами x_1 и y_1, x_2 и y_2 со средними квадратическими ошибками m_{x1} и m_{y1}, m_{x2} и m_{x2}. Тогда расстояние между точками определяется по формуле

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \qquad (3.54)$$

Возьмем полный дифференциал функции (3.54) и перйдем от дифференциала к средней квадратической ошибке:

$$s^2 m_s^2 = (x_2 - x_1)^2 (m_{x1})^2 + (x_2 - x_1)^2 (m_{x2})^2 + (y_2 - y_1)^2 (m_{y1})^2 + (y_2 - y_1)^2 (m_{y2})^2. \qquad (3.55)$$

При оценке точности плана напрвление сдвига контурной точки принимается равновероятным, поэтому точность положения точки

характеризуется *кругом погрешностей* и для расчета точности значения m_x и m_y принимаются равными и независимыми одна от другой, т. е.

$$m_{x1} = m_{y1} = m_{k1}\,, \quad m_{x2} = m_{y2} = m_{k2}\,, \qquad (3.56)$$

где m_{k1} и m_{k2} − средние квадратические ошибки координат 1 и 2 точек.

Согласно выражению (3.53)

$$m_t = m_k\sqrt{2} \quad \text{или} \quad m_k = m_t/\sqrt{2}\,. \qquad (3.57)$$

Подставив выражение (3.56) в уравнение (3.55), получим

$$s^2 m_s^2 = (m_{k1})^2[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] + (m_{k2})^2[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2], \qquad (3.58)$$

откуда

$$m_s^2 = (m_{k1})^2 + (m_{k2})^2, \qquad (3.59)$$

а с учетом (3.57)

$$m_s^2 = 0.5[(m_{t1})^2 + (m_{t2})^2]. \qquad (3.60)$$

При $m_{t1} = m_{t2} = m_t$

$$m_s = m_t, \qquad (3.61)$$

т. е. средняя квадратическая ошибка расстояния между точками на плане равна средней квадратической ошибке положения точки.

Средняя квадратическая ошибка определения расстояния междуточками по плану (карте) при помощи циркуля-измерителя и масштабной линейки с учетом точности плана m_t определяется по формуле

$$m_{s0} = \sqrt{m_t^2 + m_{из}^2}. \qquad (3.62)$$

При $m_t = 0.4$ мм и $m_{из} = 0.08$ мм $m_{s0} = 0.41$ мм, т. е. точность измерения расстояний между точками по плану определяется, главным образом точностью плана.

3.11.3. Точность направлений и углов, изображенных на плане

Точность направления характеризуется дирекционным углом (азимутом) линии на плане и зависит от ошибок положения конечных точек этой линии.

Дирекционный угол линии между точками 1 и 2 определяется по формуле

$$tg\alpha = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1). \qquad (3.63)$$

После диференцирования выраженя (3.63) и замены диференциалов средними квадратическими ошибками получим

$$m_\alpha^2 = (y_2 - y_1)^2(m_{x1})^2/(x_2 - x_1)^4 + (y_2 - y_1)^2(m_{x2})^2/(x_2 - x_1)^4 +$$

$$+ (m_{y1})^2/(x_2 - x_1)^2 + (m_{y2})^2/(x_2 - x_1)^2. \qquad (3.64)$$

Полагая, что $m_{x1} = m_{x2} = m_{k1}$ и $m_{x2} = m_{y2} = m_{k2}$, получим

$$m_\alpha^2/cos^4\alpha = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2](m_{k1})^2/(x_2 - x_1)^4 +$$

$$+ [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2](m_{k2})^2/(x_2 - x_1)^4, \qquad (3.65)$$

а с учетом выражений (3.54) и (3.57) напишем

$$m_\alpha^2/cos^4\alpha = s^2(m_{t1})^2/2(x_2 - x_1)^4 + s^2(m_{t2})2(x_2 - x_1)^4. \qquad (3.66)$$

Подставив в (3.66) значение $cos\alpha = (x_2 - x_1)/s$, получим

$$m_\alpha^2 = [(m_{t1})^2 + (m_{t2})^2]/2s^2. \qquad (3.67)$$

При $m_{t1} = m_{t2} = m_t$

$$m_\alpha = m_t/s. \qquad (3.68)$$

В последних формулах m_α выражена в радианах. В градусной мере она будет иметь вид

$$m_\alpha^2 = 0.5[(m_{t1})^2 + (m_{t2})^2](3438'/s)^2, \quad m_\alpha = 3438' m_t/s. \qquad (3.70)$$

Из формулы (3.70) видно, что средняя квадратическая ошибка дирекционного угла увеличивается с уменьшением расстояния между точками.

Еще большей ошибкой характеризуется точность угла β (рис. 27), определяемого по формуле

$$\beta = \alpha_{21} - \alpha_{23} = arctg[(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)] - arctg[(y_3 - y_2)/(x_3 - x_2)]. \quad (3.71)$$

Произведя дифференцирование функции (3.71), перейдя средним квадратическим ошибкаи, после преобразования с учетом выражений (3.54) и (3.57) при условии $m_x = m_y = m_k$ получим

$$m_\beta^2 = (m_{t1})^2/2(s_{21})^2 + (m_{t3})^2/2(s_{23})^2 +$$

$$+ [(1/s_{21})^2 + (1/s_{23})^2 - 2cos\beta/s_{21}s_{23}](m_{t2})^2/2.$$

Рис. 38

При $m_{t1} = m_{t2} = m_{t3} = m_t$

$$m_\beta^2 = m_t^2[1/(s_{21})^2 + 1/(s_{23})^2 - cos\beta/s_{21}s_{23}]. \quad (3.72)$$

Если $s_{21} = s_{23} = s$, $\beta = 90^\circ$, то

$$m_{\beta=90^\circ} = m_t\sqrt{2}/s, \quad (3.73)$$

а при $\beta = 180^\circ$

$$m_{\beta=180^\circ} = m_t\sqrt{3}/s, \quad (3.74)$$

что значительно больше ошибок, получаемых по формулам (3.70).

3.11.4. Точность площадей контуров, изображаемых на плане

Ошибки положения точек контура вызывают ошибки площади, заключенной в этом контуре. Для их определения представим, что каждая поворотная точка контура определяется на плане (карте) независимо от других и ее положение характеризуется координатами x_i и y_i со средними квадратическими ошибками m_x и m_y .

Зависимость площади многоугольника от координат его вершин (поворотных точек) можно представить формулой

$$2P = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_{i+1} - y_{i-1}). \qquad (3.75)$$

Продифференцировав это выражение по переменным x_i и y_i, получим

$$2dP = \sum_{i=1}^{n}(y_{1+1} - y_{i-1})dx_i + \sum_{i=1}^{n} x_i dy_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i dy_{i-1}. \qquad (3.76)$$

Учитывая, что в n-угольнике $\sum_{i=1}^{n} x_i y_{+1} = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} y_i$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i y_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} y_i$,

выражение (3.75) можно записать в виде

$$2dP = \sum_{i=1}^{n}(y_{i+1} - y_{i-1})dx_i + \sum_{i=1}^{n}(x_{i-1} - x_{i+1})dy_i$$

и, перейдя к средним квадратическим ошибкам, с учетом условий (3.56) и (3.57) получим

$$m_P^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_{i-1} - x_{i+1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2](m_{ti})^2/8.$$

Величины в квадратных скобках − квадраты диагоналей, проведенных между точками *n* и *2, 1* и *3, 2* и *4* и т. д. Эти диагонали D_i , согласно теореме косинуса, могут быть выражены через расстояния s_{i-1} и s_i между точками *i-1* и *i+1* и внутренние углы β при точках *i:*

$$(x_{i-1} - x_{i+1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2 = (s_{i-1})^2 + s_i^2 - 2s_{i-1}s_i cos\beta_i .$$

Тогда

$$m_P^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i (m_{ti})^2/8. \qquad (3.77)$$

Формула (3.77) может быть использована для вычисления средней квадратической ошибки площади фигуры любой формы. На практике применяют рабочие формулы, выведенные для правильных геометрических фигур.

Если участок по форме близок к правильному многоугольнику, то можно принять $s_1 = s_2 = ... = s_n = s$, $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = \beta$ и предположить, что $m_{t1} = m_{t2} = ... = m_{tn} = m_t$; тогда

$$m_P = ssin(\beta/2)m_t\sqrt{n/2}\,. \qquad (3.78)$$

Для фигуры прямоугольной формы с четырьмя точками поворота, с соотношением сторон $1:K$, при $m_{ti} = m_t$ исползуется формула

$$m_P = m_t\sqrt{P(1 + K^2)/2K}\,, \qquad (3.79)$$

а для фигуры по форме близкой к квадрату, при $n = 4$ и $K = 1$

$$m_P = m_t\sqrt{P}. \qquad (3.79)$$

3.11.5. Точность вычисления площадей аналитическим способом

Площадь простейшей геометрической фигуры − треугольника можно вычислить, измермв его высоту h и основание a, по формуле

$$P = ah/2.$$

Продифференцировав выражение логарифм площади треугольника $lnP = lna + lnh - ln2$ и перейдя от дифференциалов к средним квадратическим ошибкам, получим

$$(m_P/P)^2 = (m_a/a)^2 + (m_h/h)^2. \qquad (3.80)$$

Такие же формулы получим для определения точности вычисления площади прямоугольника, параллелограмма и трапеции, у которых измеряется высота и средняя линия.

Если приближенно считать, что измерение лний на местности производится с относительной ошибкой

$$m_a/a = m_h/h = 1/N,$$

то

$$m_P = P\sqrt{2}/N.$$

Если четырехугольник по форме близок к квадрату, т. е. $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s$, вследствие чего $m_{s1} = m_{s2} = m_{s3} = m_{s4} = m_s$, то

$$m_P = m_s s = m_s\sqrt{P} \quad \text{или} \quad m_P/P = m_s/s. \qquad (3.81)$$

Следовательно, с какой относительной ошибкой измеряются все линии в четырехугольнике, по форме близком к квадрату, с такой же относительной ошибкой вычисляется площадь.

Если вычислена площадь полигона по координатам его вершин, то вывод точных формул для оценки точности вычисления площади очень сложен, так как углы и линии уравненного полигона зависимы. Однако, если форма полигона близка к квадрату, то для приближенной оценки можно использовать формуоы (3.81).

3.11.6. Оценка точности угловых измерений

На точноть измерения углов (и горизонтальных, и вертикальных) оказывают влияние как внешние условия, так и ошибки собственно измерения. Ошибки, обусловленные влиянием внешней среды, как известно, можно свести к минимуму.Тогда точность измрения угла будет определяться только ошибками собственно измерения.

В теодолитных ходах горизонтальный угол β измеряется полным приемом, состоящим из двух полуприемов − измерение при «круге лево» и при «круге право» и равен среднему $\beta_{ср}$ из двух измерений:

$$\beta_L = L_2 - L_1, \ \beta_R = R_2 - R_1;$$
$$\beta_{ср} = (\beta_L + \beta_R)/2 = 0.5(L_2 - L_1 + R_2 - R_1), \qquad (3.82)$$

где L_1, L_2, R_1, R_2 − отсчеты по горизонтальному кругу при «круге лево» (L) и «круге право» (R) на 1 и 2 направления теодолитного хода.

При равноточных измерениях $m_{L1} = m_{L2} = m_{R1} = m_{R2} = m_н$, где $m_н$ − средняя квадратическая ошибка направления. После дифференцирования функции (3.80) и прехода к средним квадратическим ошибкам получим

$$m_{\beta ср} = m_н ,$$

т. е. средняя квадратическая ошибка угла, измеренного одним приемом, равна средней квадратической ошибке направления.

Ошибка направления складывается изошибок визирования и отсчитывания:

$$m_н = \sqrt{m^2_{виз} + m^2_o}.$$

Принимая $m_{виз} = 40''/Г$ ($Г=20^x$ − увеличение трубы) и $m_o=30''$ для теодолитов 2Т30, видим, что ошибки визирования малы (2”) и их не учитывают, поэтому

$$m_{\beta ср} = m_н = m_o = 30''.$$

Итак, средняя квадратическая ошибка измеренного угла шкаловым теодолитом равна средней квадратической ошибке отсчета по шкале.

Для контроля измерений необходимо знать предельную ошибку измерения угла $\Delta\beta_{пред} = 3m_\beta$ или $2m_\beta$ в соответствии с производственным допуском. Средняя квадратическая ишибка разности двух значений угла, полученных а полуприемах, в соответствии с функцией $d = \beta_L - \beta_R$ будет равна

$$m_d = m_o\sqrt{2}.$$

Тогда допустимое расхождение значений углов в полуприемах составит $_{пред}\Delta_d = 2m_d = 2m_o\sqrt{2}$.

Таким образом, для технического теодолита 2Т30 $_{пред}\Delta_d = 1 - 1.5'$.

4. ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ СЪЕМКИ

4.1 Общие сведения о топографических съемках

Полевая работа, которая производится в целях получения карт, планов и профилей, назывется *съемкой*. Снять некоторые точки местности – это значит определить их положение на плане или карте.

В зависимости от назначения съемки объектами, подлежащими съемке, могут быть различные предметы антропогенного (т. е. созданные людьми) и естественного характера как на земной поверхности, так и под нею. Совокупность снимаемых объектов называют ситуацией.

В зависимости от целей, для которых производятся съемки, последние делятся на виды по названиям: топографическая сельскохозяйственная, почвенная, городская, лесная, геологическая, геофизическая и др.

Топографическая съемка − комплекс полевых и камеральных работ, имеющих целью изображение на бумаге условными знаками в заданном масштабе местных предметов и рельефа участка земной поверхности. Топографические съемки разделяются на виды в зависимости от применяемых приборов. Для получения планов небольших участков местности и сравнительно невысокой точности применяют эккерые и буссольные съемки (эккер и буссоль − простейшие геодезическите приборы), а более точных планов участков, занимающих площади в несколько сотен и тысяч га, − теодолитные и мензульные съемки (теодолит и мензула − более сложные приборы). При необходимости изобразить на плане небольших участков рельеф местности применяют тахеометрическую съемку (*тахео* − быстро). Основным видом съемки для значителных территорий являются аэрофототопографическая и космическая съемки. Для горной и всхолмленной местности применяют фототеодолитную съемку, состоящую в том, что местность фотографируют фототеодолитами, после чего при помощи специиальных приборов по фотоснимкам составляют план местности. Иногда возникает необходимость произвести съемку местности быстро и хотя бы приближенно. В этом случае применяют глазомерную съемку.

Все съемочные работы являются полевыми; последующие геодезические работы – вычислительные и графические – выполняются в кабинетах и лабораториях и называются камеральными

Основные законы съемок: непрерывный контроль всех действий и производство работ по принципу от общего к частному. Сначала определяют с большой точностью положение небольшого числа вспомогательных – геодезических точек, а потом уж снимают все остальные точки, которые должны быть нанесены на плане. Съемке подлежат не все подробности, а только те, которые необходимы для данных целей. Чем больше подробностей надо изобразить на плане и чем точнее он должен быть, тем крупнее следует взять для него масштаб.

Съемка любого угодья или сооружения сводится к съемке его границ. Эти границы чаще всего бывают кривыми линиями. Каждую кривую можно заменить некоторой ломаной линией, причем, чем больше изломов будет содержать последняя, тем ближе она будет к реальной кривой.

Каждый отрезок ломаной линии определяется положением двух его конечных точек. Следовательно, съемка местности всегда сводится к определению положения некоторого числа отдельных точек каждого контура. Соединив последовательно эти точки, мы тем самым изобразим на плане соответствующие контуры в уменьшенном и подобном виде.

Некоторые предметы, расположенные на поверхности Земли, имеют правильные границы, очертания которых подчинены известным геометрическим условиям. Например, горизонтальные проложения строений – прямоугольники, клумбы и цветники – правильные многоугольники, стороны дорог – параллельные линии, звенья телефонных и осветительных линий – прямые линии и т.д. Все эти закономерности необходимо учитывать при съемке. Для определения положения любого предмета правильной формы на горизонтальной плоскости относительно опорных геодезических точек (пунктов) достаточно определить положение только двух точек этого предмета. При этом предполагается, что есть все данные, необходимые для построения плана этого предмета и определяется лишь место на плоскости, где его расположить. Например, при съемке в саду клумбы, имеющей форму правильного

многоугольника, достаточно определить положение лишь двух его вершин относительно границ сада, остальные можно будет построить легко, зная длину и число сторон многоугольника (контуры клумбы). Таким же образом нужно поступить и при съемке отдельного строения: построив два его угла, можно нанести остальные углы по соответствующим промерам.

Если снимаемая граница имеет неправильную форму, то все ее характерные точки определяют независимо друг от друга (привязывают к опорным точкам).

Съемку местности и составление плана чаще выполняют неодновременно. Это позволяет ускорить производство полевых работ и создать лучшие условия для выполнения камеральных (вычислительных, чертежных и т.п.) работ в помещении.

Для того, чтобы съемщик не ошибся в произведенных им промерах и чтобы он правильно сумел соединить на плане снятые точки, он ведет схематическую зарисовку местности с указанием измеренных величин. Такой сделанный от руки схематических план местности, на котором показываются контуры угодий, местные предметы, результаты измерений, приводятся названия и другие сведения, необходимые для составления точного плана, называется *абрисом.* Его составляют на отдельные участки местности или всю территорию сразу. На абрисе надо стараться изобразить местность подробно, все числа подписываются так, чтобы было понятно, к каким величинам они относятся. Абрис нужно вести настолько отчетливо, чтобы он был понятен всякому другому лицу, знакомому со съемками.

Система (совокупность) опорных точек, обеспечивающих съемку на некотором участке поверхности Земли, называют *съемочным обоснованием.*

Простейшая сеть состоит из одной стороны, далее по степени сложности следует сеть из одного треугольника, затем – из одного многоугольника (полигона) и, наконец, сети, состоящие из нескольких треугольников и многоугольников.

При съемках местности используются различные способы создания съемочного обоснования; важнейшие из них следующие:

− триангуляция – система треугольников, в которых измеряются углы и базисные стороны (остальные стороны вычисляются);

− трилатерация – система треугольников, в которых измеряются

стороны;

− спутниковая триангуляция – пространственная геодезическая сеть, элементы которой получены по измеренным синхронно с разных наземных станций сферическим координатам направлений на ИСЗ;

− полигонометрия (обход) и теодолитные ходы;

− створные методы;

− прямоугольных координат (перпендикуляров);

− полярных координат (кругового визирования);

− засечки угловые и линейные.

Первые четыре способа обычно применяются для создания геодезических сетей, последние – для развития съемочной сети..

Геодезической сетью называется совокупность зафиксированных на местности точек, для которых определены плановые координаты (прямоугольные X и Y, географические φ и λ) в принятой двухмерной системе координат и отметки H в принятой системе высот.

Съемочная сеть − совокупность точек, определяемых дополнительно к пунктам геодезической сети для непосредственного обеспечения топографических съемок. Определение положения пунктов съемочных сетей выполняют проложением теодолитных ходов или построение сети микротриангуляции, прямыми, обратными или комбинированными засечками либо графическими методами при мензульной съемке. Высоты этих пунктов определяют геометрическим или тригонометрическим нивелированием.

4.2. Сущность теодолитной съемки

Теодолитная съемка, как и другие съемки, производится по основному правилу геодезии “от общего к частному”, то есть сначала создается съемочная геодезическая сеть, а затем производится съемка подробностей (ситуации). Съемочной геодезической сетью при теодолитной съемке может быть сеть треугольников (триангуляция) или сеть теодолитных полигонов, составляющих группу смежных многоугольников или теодолитных ходов. Теодолитным ходом называется построенный на местности разомкнутый или сомкнутый многоугольник, в котором измеряются

все стороны и горизонтальные углы между ними. Ход, проложенный внутри крупного полигона для сгущения съемочного обоснования и опирающийся на точки полигона, называется диагональным. Ход может быть проложен между двумя жесткими точками (координаты таких точек известны), жесткими сторонами (координаты начальной и конечной сторон известны. Ход, опирающийся на жесткую точку (или сторону) только одним концом, называется висячим.

Перед производством измерений на местности все вершины (поворотные точки) полигонов и ходов в зависимости от их назначения и сроков работ закрепляются кольями, столбами и другими знаками. После закрепления точек измеряют углы и длины сторон (линий) полигонов и ходов. Перед измерением линий производят подготовку, заключающуюся в вешении их, а также удалении с измеряемой линии камней, кустов, кочек и т.п. Таким образом, процесс теодолитной съемки складывается из:

− обозначения и закрепления точек на местности;
− подготовки линий к измерению;
− измерения линий и углов между ними;
− съемки ситуации.

Для измерения сторон теодолитного хода применяются стальные ленты, рулетки, различные дальномеры; углы измеряются с помощью технических теодолитов.

4.2.1. Обозначение точек на местности

В зависимости от условий местности, назначения съемки, точности измерений, требований к сохранности точек для их обозначения применяются различные знаки.

Для обозначения точек съемочного теодолитного хода в сельской местности применяют деревянные колья длиной 20-30 см, которые забиваются вровень с землей или их верхние грани оставляются над поверхностью не более 2 см. Для быстрого разыскивания знака вокруг кола выкапывается канава в виде треугольника, квадрата или кольца диаметром 0.5-1.0 м, шириной 0.1-0.2 м. Кол имеет обычно круглое или квадратное сечение. Центр в верхнем срезе кола представляет вершину угла, над которой устанавливается угломерный инструмент и которая служит началом линии хода. Для обозначения номера точки рядом с колом иногда забивают второй

кол – сторожок, на верхней части которого над землей 0.1 м подписывают номер.

При необходимости сохранить обозначение точки на более длительный срок вместо кола в землю вкапывают деревянный или бетонный столб длиной 1.5 м на глубину 0.6-1.0 м,
под который кладут камень или кирпич; вокруг столба вырывают канаву на штык лопаты, землю из канавы насыпают около столба в виде кургана, имеющего форму усеченного конуса с диаметром нижнего основания до 2 м. С целью предотвращения вытаскивания деревянного столба из земли в нижнюю его часть врезают перекладину. Для более точного обозначения точки в верхний срез деревянного столба вбивают гвоздь, центр шляпки которого и является вершиной измеряемого угла, а на верхней грани бетонного столба делается насечка в виде креста. В городах точки обозначают металлическими стержнями, закладываемыми под асфальт тратуара и накрываемыми чугунной крышкой вровень с верхней поверхностью асфальта.

4.2.2. Измерение длин сторон теодолитного хода мерной лентой

а) Вешение линий. Если линии измеряются путем укладывания мерного прибора (ленты, рулетки) по земле, то надо следить за тем, чтобы между точками измерялось кратчайшее расстояние по земной поверхности. Для этого мерный прибор не должен отклоняться в сторону от направления линии и укладывать надо его в створе измеряемой линии, то есть в вертикальной плоскости, проходящей через ее концы. Установка вех в створе линии называется вешением. Практика показывает, что вешение необходимо только для линий длиннее 200 м. Вехи при вешении устанавливаются примерно через 100 – 200 м в зависимости от рельефа местности. Вехи должны быть прямыми, окрашенными в белый и черный (или красный) цвета вперемежку через 2 дм.

Для вешения линии на ее концах устанавливаются вехи. Вешение ведется обычно “на себя”. Для этого техник встает перед вехой А и смотрит на веху В, а рабочий по указанию техника ставит веху 1 так, чтобы она закрывала собой веху В. После этого рабочий идет по направлению к точке А и ставит веху 2 так, чтобы она закрывала

вехи 1 и В. В таком же порядке устанавливаются все остальные вехи (рис. 37). Вешение «на себя» точнее вешения «от себя», т. к. ближняя к точке *А* вешка закрывет большее пространство (создает более широкую зону невидимости) до точки *В*, чем из точек 1, 2 и др., что не позволяет устанавливать следующие вешки в створ линии.

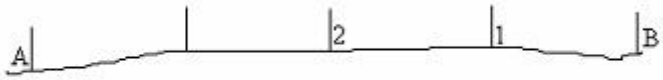


Рис. 38

б) Измерение линий на местности мерной лентой. Измерение линий лентой состоит в последовательном укладывании мерного прибора в створе измеряемой линии (створом называется линия сечения земной поверхности вертикальной плоскостью, проходящей через закрепленные вешками концы линии). Измерение выполняют двое рабочих. При первом укладывании ленты передний рабочий берет в левую руку ручку ленты и все десять шпилек и по указанию заднего рабочего встает в створе линии. Когда задний рабочий совместит нулевой штрих с началом линии (центром кола, столба и др.), передний рабочий, встряхнув и натянув ленту в створе линии, вынимает правой рукой из левой руки шпильку и через крючок ленты втыкает ее вертикально в землю. После этого ленту перемещают вперед по линии, задний рабочий задним крючком цепляет ленту за первую шпильку и направляет переднего рабочего по створу линии. Передний рабочий, уложив ленту в створе линии, через передний крючок ленты втыкает вторую шпильку в землю, после чего задний рабочий вынимает первую шпильку и ленту перемещают вперед. Так после каждого укладывания ленты число шпилек у переднего рабочего убавляется, у заднего – увеличивается. Когда у переднего рабочего не остается ни одной шпильки, то, уложив ленту в створе и натянув ее, передний рабочий встает ногами на ленту, получает от подошедшего заднего рабочего все десять шпилек, втыкает одну шпильку через крючок ленты в землю, осторожно перемещает ленту вперед и измерения продолжают в прежнем порядке. Дойдя до конца линии, передний рабочий

протягивает ленту вперед за пределы линии, пока задний рабочий не зацепит крючком ленты за последнюю шпильку. После этого подсчитывают количество шпилек у заднего рабочего, включая стоящую в земле шпильку, и для контроля подсчитывают количество шпилек у переднего рабочего. У конца линии по натянутой ленте с точностью до 0.01 м отсчитывают остаток – расстояние от последней шпильки заднего рабочего до конца линии.

Длина измеренной линии определяется по формуле

$$D = nl_0 + r + n\Delta l, \qquad (4.1)$$

где n – число шпилек у заднего рабочего, l_0 – номинальная длина ленты, Δl – поправка за компарирование ленты, $n\Delta l$ – поправка в длину линии за компарирование ленты, r – остаток (компарирование – точное определение длины ленты с помощью специального эталона, называемом компаратором).

При подсчете n необходимо учесть количество передач шпилек задним рабочим переднему и, во избежание грубых ошибок, каждую передачу отмечать в журнале.

Для контроля линии в теодолитных ходах измеряют дважды в двух направлениях, и если между двумя значениями расхождение допустимо, то из двух полученных значений выводят среднее арифметическое, которое и принимается за результат измерения.

Допустимое расхождение между двумя измерениями одной и той же лентой определяется по формуле

$$f_D = 0.014\sqrt{D}, \qquad (4.2)$$

где D – длина линии в метрах.

Точность измерения длины линии 20-метровой стальной лентой характеризуется средними относительными ошибками: при благоприятных условиях 1 : 2000, при особо благоприятных – 1 : 3000 и при неблагоприятных – 1 : 1000. Если величина поправки за компарирование меньше 0.002 м, то она не учитывается, поскольку ее относительная величина будет 1 : 10 000.

Для определения горизонтального проложения d на местности измеряют расстояние D и угол его наклона v к горизонту. Тогда

$$d = D\cos\nu \quad \text{или} \quad d = D - \Delta D, \qquad (4.3)$$

где поправка за наклон к горизонту, равная

$$\Delta D = D - d = D - D\cos\nu = D(1 - \cos) = 2D\sin^2(\nu/2). \qquad (4.4)$$

Для вычисления поправок за наклон к горизонту можно пользоваться таблицами поправок за наклон линии, вычисленных по формуле (4.4).

в) Измерение угла наклона эклиметром. Углы наклона можно измерить эклиметром, который представляет собой пустотелую трубку прямоугольного сечения с двумя диоптрами: предметным, представляющим горизонтальную нить, и глазным – горизонтальной прорезью на передней стенке трубки. С правой стороны трубки закреплена круглая коробка, внутри которой при нажатии тормозной кнопки свободно вращается на оси диск с градусными делениями на ободе и с прикрепленным к нему в нижней части грузом, находящимся против деления 90º. Прорезь и горизонтальная нить параллельны оси круга. В исправленном эклиметре нулевой диаметр незакрепленного диска (от которого в обе стороны нанесены деления до 90º или 60º) под действием груза всегда занимает горизонтальное положение, независимо от наклона осей коробки с трубой. В круглой коробке около глазного диоптра находится окошечко, в котором через лупу видны деления внутреннего диска.

Измерение угла наклона состоит в том, что наблюдатель, взяв в руку эклиметр, нажимает на кнопку, закрепляющую круг, смотрит на метку вехи, высота которой равна высоте глаза наблюдателя над землей, через прорезь и проволочку и, когда круг успокоится, отсчитывается угол наклона по кругу против видимой нити, одновременно смотря в лупу и прорезь.

Перед работой эклиметром надо проверить, выполнено ли условие – при горизонтальном положении линии визирования отсчет по кругу должен быть равным нулю. Это условие поверяется измерением угла наклона с обоих концов линии (рис. 38). Если условие выполнено, то отсчеты по кругу, взятые на обоих концах линии, по абсолютной величине должны быть равны (углу наклона) и противоположны по знаку. Если линия горизонта образует с

нулевым диаметром угол δ, то условие не выполнено, отсчеты *a* не будут равны углу наклона и можно написать уравнения

$$v = a_1 - \delta, \quad v = a_2 + \delta.$$

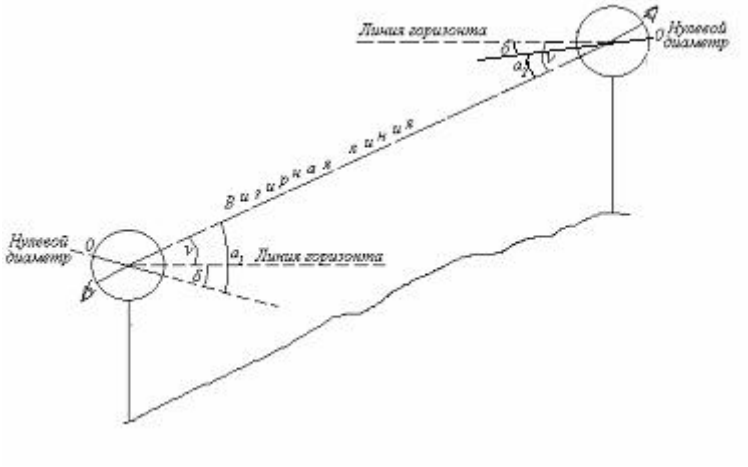


Рис. 38

Решая их, получим

$$v = 0.5(a_1 + a_2), \qquad \delta = 0.5(a_1 - a_2). \qquad (4.5)$$

Из равенств (4.5) следует, что неверным эклиметром можно получить верное значение угла наклона. Однако для удобства пользования эклиметром его следует исправить, если поправка больше 0.25°. Для этого надо отвернуть винты крышки коробки, снять ее и, открепив грузик, переместить его в нужное положение и закрепить.

4.2.3. Конструктивные элементы технических теодолитов

Прибор, предназначенный для измерения горизонтальных и вертикальных углов на местности, называется теодолитом.

а) Устройство теодолита. У первых теодолитов в центре угломерного круга на острие иголки помещалась свободно вращающаяся линейка (как стрелка у компаса) с визиром

(устройством для визуального наведения прибора на точку) на ней. В линейке были сделаны вырезы и в них натянуты нити, играющие роль отсчетных указателей. Подвижная линейка называлась алидадой, а угломерный круг лимбом. Центр лимба помещали в вершину измеряемого угла и надежно закрепляли. Поворачивая линейку, устанавливали ее в створе первой стороны угла и брали отсчет по лимбу N_1. Затем совмещали линейку со второй стороной угла и брали отсчет N_2. Значение угла равно разности отсчетов $\beta = N_2 - N_1$.

С появлением зрительных труб визирные устройства используются только на простейших приборах (компасы, буссоли, эклиметры и др.)

Стороны измеряемого угла проектируются на плоскость лимба подвижной вертикальной плоскостью, которая называется коллимационной плоскостью. Коллимационная плоскость образуется визирной осью зрительной трубы при вращении последней вокруг своей оси.

Визирная ось (или визирная линия) – воображаемая линия, проходящая через центр сетки нитей и оптический центр объектива трубы.

Основными частями теодолита являются следующие:

лимб – угломерный круг с делениями от 0º до 360º;

алидада – подвижная часть теодолита, несущая систему отсчитывания по лимбу и визирное устройство – зрительную трубу;

зрительная труба – крепится на подставках на алидадной части;

система осей - обеспечивает вращение алидадной части и лимба вокруг вертикальной оси;

вертикальный круг служит для измерения вертикальных углов;

подставка с тремя подъемными винтами;

зажимные (закрепительные или стопорные) и наводящие (микрометренные) винты вращающихся частей теодолита: лимба, алидады, трубы;

штатив с площадкой для установки подставки теодолита и становым винтом с крючком для отвеса.

В теодолитах различают три разных вращения: зрительной трубы, алидады и лимба. Вращение трубы и вращение алидады снабжены двумя винтами – зажимным и наводящим. Что касается вращения лимба, то оно оформляется по-разному. В повторительных

теодолитах лимб может вращаться вместе с алидадой. В теодолитах Т30 и 2Т30 для вращения лимба имеются два винта – зажимной и наводящий, причем они работают только при зажатом винте алидады.

На рисунке 39 представлен внешний вид теодолита 2Т30.

Рисунок 39, а): 1 − кремальера (для фокусировки трубы); 2 − закрепительный винт трубы; 3 − визир; 4 − колонка; 5 − закрепительный винт горизонтального круга; 6 − гтльза; 7 − юстировочный винт; 8 − закрепительный винт алидады; 9 − уровень при алидаде.

Рисунок 39, б): 1 − наводящий винт горизонтального круга; 2 − окуляр микроскопа; 3 − зеркало подсветки; 4 − боковая крышка; 5 − посадочный паз для буссоли; 6 − уровень при трубе; 7 − юстировочная гайка; 8 − колпачок; 9 − диоптрийное кольцо окуляра; 10 − наводящий винт трубы; 11 − наводящий винт алмдады; 12 − подставка; 13 − подъемные винты; 14 − втулка; 15 − основание; 16 − крышка.

а) *б)*

Рис. 39

б) Отсчетные приспособления. Приспособление, несущее единицу измерения, называется рабочей мерой. Примеры рабочей меры: линейка с делениями сантиметров и миллиметров, транспортир с делениями градусов и др.

Шкала рабочей меры, как правило, равномерна. Она может располагаться по прямой линии, по дуге окружности или какой-либо другой кривой.

Отсчитывание по шкале рабочей меры производят по отсчетному указателю (начало и конец отрезка линии, сторона угла, штрих логарифмической линейки, стрелка весов и т. д.). В общем случае отсчетный указатель (О.У.) устанавливается между двумя штрихами шкалы (рис. 41); один из них называется младшим (мл.), другой – старшим (ст.). Отсчет N по шкале равен сумме двух величин: $N = N_{мл} + x$, где $N_{мл}$ − значение младшего штриха шкалы (на рис. 40 $N_{мл} = 3$); x – доля цены деления шкалы от младшего штриха до отсчетного указателя ($x = 0.7$)

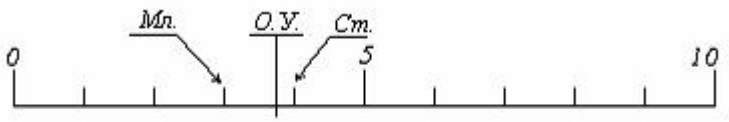


Рис. 41

Величину x можно получить разными способами, простейший из них – оценивание на глаз. Другой способ предполагает наличие специального отсчетного приспособления, назначение которого измерять величину x с той или иной точностью. Известны следующие отсчетные приспособления: в машиностроении – нониус (верньер), микрометр, микроскоп-микрометр, в оптическом приборостроении – штриховой и шкаловый микроскопы, оптический микрометр.

Оптические отсчетные приспособления рассмотрим на примере угловой шкалы, расположенной по окружности. Такая шкала называется угломерным кругом или лимбом. Ценой деления лимба λ называют центральный угол, стягиваемый дугой в одно деление. В практике встечаются лимбы теодолитов с ценой деления 1º, 20′, 10′, 5′. Диаметр лимбов бывает от 72 мм до 270 мм. Роль отсчетного указателя при отсчете по лимбу могут выполнять одиночный штрих,

двойной штрих (биссектор), нулевой штрих шкалы отсчетного приспособления, штрих основной шкалы (шкалы лимба).

Штриховой микроскоп (рис. 41). Отсчетным указателем здесь является неподвижный штрих, выгравированный на стеклянной пластинке, помещенной на пути хода лучей, идущих от осветительного окошка через штрихи лимба в отсчетный микроскоп. Оценка доли деления лимба выполняется на глаз с точностью до 0.1 деления (при видимом расстоянии между штрихами 2 мм и толщине штрихов 0.1 мм).

Шкаловый микроскоп (рис. 42). На пути хода, иидущих лучей от осветительного окошка через штрихи лимба в поле зрения микроскопа, помещена стеклянная пластинка с гравированной шкалой. Длина шкалы равна длине одного деления лимба λ; шкала разделена на *n* равных частей, цена одного деления шкалы шкалового микроскопа равна (у теодолита 2Т30 λ = 1°, *n* = 12)

$$\mu = \lambda/n.$$

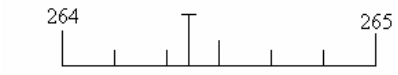


Рис. 41

Рис. 42

Отсчетным указателем является нулевой штрих шкалы шкалового микроскопа. Доля деления лимба младшего штриха щкалы лимба до отсчетного указателя измеряется непосредственно по шкале микроскопа, так как направления возрастания делений на лимбе и на шкале микроскопа противоположные. Доля деления шкалы микроскопа оценивается на глаз. Полный отсчет по лимбу равен сумме отсчетов по младшему штриху лимба $N_{мл}$ и по шкале микроскопа $N_{ш}$:

$$N = N_{мл} + N_{ш}\,.$$

в) Зрительные трубы. Зрительные трубы бывают астрономическими и земными. Астрономические трубы дают обратное изображение предметов, земные − прямое. В

геодезических приборах чаще применяются астрономические трубы, так как они имеют более простое устройство и в них меньше потери света. По конструкции зрительные трубы бывают прямые и ломаные.

Основными деталями зрительных труб являются линзы – собирательные и рассеивающие. Все собирательные линзы выпуклые: двояковыпуклые, плосковыпуклые, вогнутовыпуклые; все рассеивающие линзы вогнутые: двояковогнутые, плосковогнутые, выпукловогнутые. Линза имеет оптический центр, проходя через который лучи не изменяют своего направления. Лучи, проходящие через другие участки линзы, испытывают преломление и изменяют свое первоначальное направление.

Линия, соединяющая центры сферических поверхностей линзы, называется главной оптической осью линзы. По обе стороны от оптического центра на главной оптической оси есть точки, называемые главными фокусами линзы: передний фокус F и задний фокус F_1. Расстояние от оптического центра до фокуса называется фокусным расстоянием. Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и проходящая через точку фокуса, называется фокальной плоскостью линзы.

Для построения изображения предметов в линзе обычно используются три луча:

− луч, проходящий через оптический центр линзы;

− луч, идущий параллельно главной оптической оси;

− луч, проходящий через передний фокус линзы.

Изображение считается действительным, если оно получается в точках пересечении лучей в прямом направлении. Изображение считается мнимым, если оно получается на пересечении лучей в обратном направлении.

Простейшей зрительной трубой является труба Кеплера − с внешней фокусировкой (рис. 43). Она состоит из объктивного колена 1 с объективом 2, окулярного колена 3, двигающегося в объективном колене, и окулярной трубочки 4 с окуляром 5, двигающейся в окулярном колене (рис. 43, а). В окулярном колене перед окуляром помещается металлическое кольцо, называемое диафрагмой, со стеклянной пластинкой, на которой выгравирована сетка нитей. Точку пересечения взаимно перпендикулярных нитей, проходящих через центр сетки, называют пересечением нитей,

крестом нитей или перекрестием. Для получения резкого изображения сетки нитей (установка ее по глазу) окулярную трубку вращением перемещают внутри окулярного колена. Резкое изображение наблюдаемого предмета достигается перемещением окулярного колена внутри объективного посредством вращения кремальеры 6.

Объектив трубы Кеплера – длиннофокусный, а окуляр – короткофокусный. Изображение, даваемое объективом, должно располагаться между передним фокусом окуляра и его оптическим центром.

На рис. 43, б) представлен ход лучей от точек *A* и *B* в трубе Кеплера. Объектив дает действительное обратное изображение предмета – отрезок *ab*. Изображение, даваемое окуляром, − мнимое, прямое, увеличенное – отрезок *a'b'*, но поскольку оно было уже обратным, то таковым оно и остается.

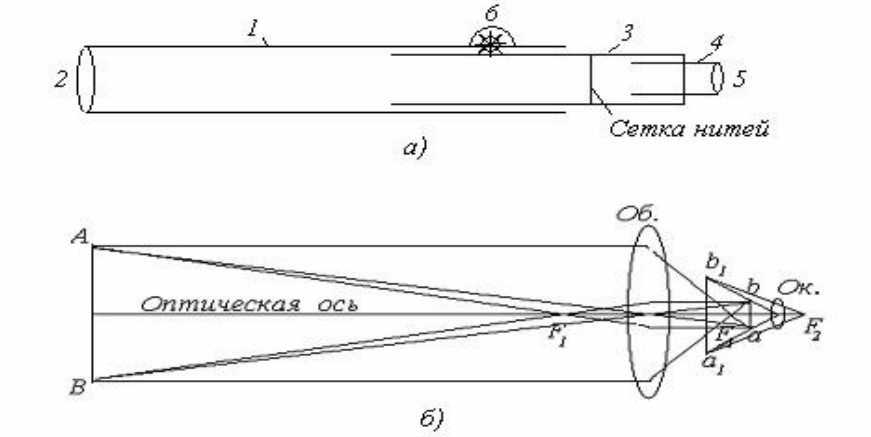


Рис. 43

Отношение угла зрения α, под которым изображение предмета видно в трубе, к углу зрения β, под которым предмет виден невооруженным глазом, называется увеличенме трубы (рис. 44):

$$V = \alpha/\beta. \qquad (4.8)$$

Из треугольника aFO_2 имеем

$$tg(\alpha/2) = aF/FO_2 = ab/2f_{ок}\,, \qquad (4.9)$$

а из треугольника aO_1F:

$$tg(\beta/2) = aF/FO_1 = ab/2f_{об}\,. \qquad (4.10)$$

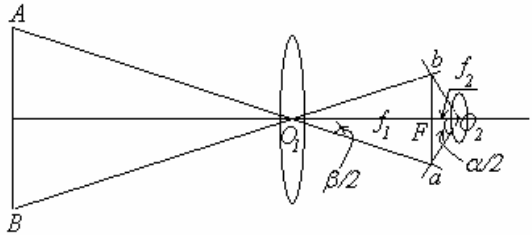


Рис. 44

По малости углов α и β обычно можно принять $tg(\alpha/2) = \alpha/2$ и $tg(\beta/2) = \beta/2$, откуда

$$tg(\alpha/2)/tg(\beta/2) = \alpha/\beta. \qquad (4.11)$$

Подставив в (4.11) значения тангенсов из формул (4.9) и (4.10), получим

$$V = f_{об}/f_{ок}\,. \qquad (4.12)$$

Увеличение трубы Кеплера равно отношению фокусного расстояния объектива к фокусному расстоянию окуляра.

Участок пространства, видимый в трубе при неподвижном положении, называется ее полем зрения. Поле зрения определяется углом ε, вершина которого лежит в оптическом центре объектива, а стороны касаются краев отверстия диафрагмы (рис. 45). Диафрагма диаметром d_1 устанавливается внутри трубы в фокальной плоскости объектива.

Из рис. 45 видно, что

$$tg(\varepsilon/2) = \varepsilon/2\rho^\circ = d_1/2f_{об}\,,$$

откуда

$$\varepsilon = d_1\rho^\circ / f_{об} . \qquad (4.13)$$

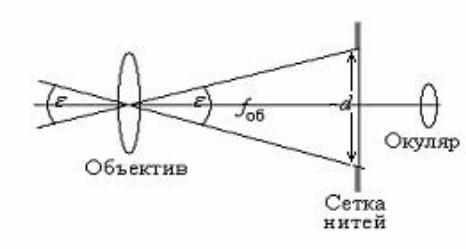


Рис. 45

Обычно в геодезических приборах принимают

$$d_1 = 0.7 f_{ок},,$$

тогда в радианной мере $\varepsilon = 0.7/V$. Отсюда видно: чем больше увеличение трубы, тем меньше ее угол зрения.

Более совершенной является труба с внутренней фокусировкой (рис. 46, а). Она состоит из объективного колена 1 с объективом 2 и окулярной трубкой 3 с окуляром 4. Расстояние между объективом и

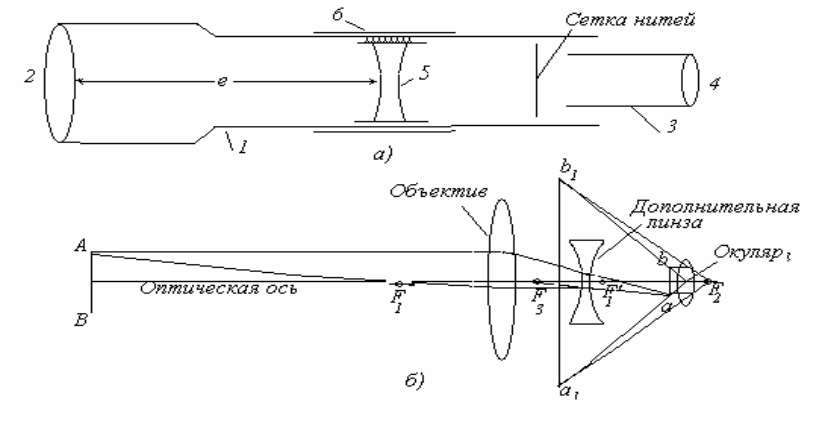


Рис. 46

сеткой нитей постоянно и резкое изображение наблюдаемого предмета получается с помощью дополнительной (фокусирующей) двояковогнутой (рассеивающей) линзы 5. Перемещение этой линзы внутри трубы осуществляется с помощью кремальеры 6.

На рис. 46, б показано построение изображения предмета лучами, исходящими из точки *A*; построение изображения точки *B* аналогично.

Труба с внутренней фокусировкой более герметична, чем труба с внешней фокусировкой, и положение визирной оси в ней более устойчиво, т. к. расстояние между объективом и сеткой нитей неизменно.

Все зрительные трубы, независимо от их конструкции, имеет три оси:

1 − геометрическую (ось цилиндра);

2 − оптическую (линия, соединяющая оптические центры объектива и окуляра);

3 − визирную (линия, соединяющая центр объектива с центром сетки нитей).

г) Уровни. Уровни служат для приведения осей прибора в горизонтальное или вертикальное положение и для измерения малых углов наклона. Применение уровней основано на свойстве пузырька газа занимать в жидкости наивысшее положение. Уровни бывают цилиндрические и круглые.

Цилиндрический уровень состоит из чувствительного элемента – ампулы и металлической оправы для ее крепления и защиты от внешних воздействий. Ампула цилиндрического уровня – это стеклянная трубка, запаянная с концов и заполненная спиртом или серным эфиром. Небольшое пространство, занимаемое парами этой жидкости, называется пузырьком уровня.

Внутренняя поверхность ампулы имеет форму дуги большого радиуса. Касательная к дуге в середине пузырька всегда горизонтальна, так как выталкивающая сила, действующая на пузырек, направлена по вертикальной линии. На ампуле нанесены деления.

Центральный угол, соответствующий дуге в одно деление шкалы, называется ценой деления уровня и обозначается символом τ. Точка О в средине шкалы называется нульпунктом уровня, а касательная, проведенная в нульпункте, называется осью цилиндрического уровня *и-и* (рис. 47). Если пузырек находится в нульпункте, то ось уровня занимает горизонтальное положение, в противном случае – наклонное. Поэтому для приведения какой-либо линии или плоскости в горизонтальное (или вертикальное) положение нужно закрепить уровень так, чтобы ось уровня была строго параллельна (или перпендикулярна) искомой лини или плоскости. Без выполнения этих условий применение уровня не имеет смысла.

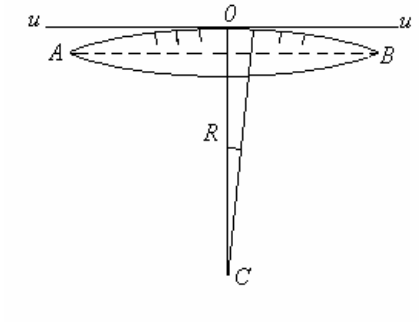


Рис. 47

При наклоне уровня на угол ε пузырек отклонится от нульпункта на n делений, то есть $\varepsilon = n\tau$. Отсюда следует второе определение цены уровня: цена деления уровня – это угол, на который наклоняется ось уровня при смещении пузырька на одно деление шкалы, т. е.

$$\tau = \varepsilon/n$$

.

Цену деления уровня можно определить разными методами: по рейке (в поле), на экзаменаторе – специальном устройстве, позволяющем одновременно с определением цены деления выполнить исследования качества шлифовки внутренней поверхности ампулы уровня.

Круглый уровень – это часть стеклянной сферы, на которую нанесены концентрические окружности. Центр окружностей является нульпунктом уровня. Осью круглого уровня называется нормаль к сферической поверхности ампулы, проведенная в нульпункте. Если пузырек уровня находится в нульпункте, то его ось занимает вертикальное положение. Круглые уровни относятся к уровням малой точности.

4.2.4. Поверки теодолита

Теодолит должен удовлетворять следующим геометрическим условиям (рис. 48), вытекающим из общего принципа измерения горизонтального угла:

1 – ось цилиндрического уровня при алидаде горизонтального круга должна быть перпендикулярна к оси вращения алидады ($UU_1 \perp ZZ_1$);

2 − ось вращения алидады должна быть установлена вертикально;

3 − визирная ось трубы должна быть перпендикулярна оси вращения трубы ($VV_1 \perp HH_1$);

4 — ось вращения трубы должна быть перпендикулярна оси вращения алидады ($HH_1 \perp ZZ_1$):

5 – вертикальная нить сетки нитей должна лежать в коллимационной плоскости.

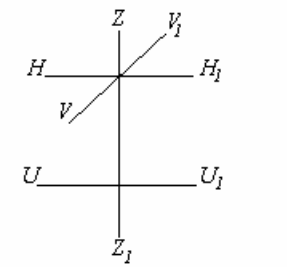


Рис. 48

а) *Установка оси вращения алидады в вертикальное положение* выполняется в следующем порядке:

− вращая алидаду, устанавливают ось уровня параллельно линии, соединяющей два подъемных винта, и вращением последних приводят пузырек в нульпункт;

− поворачивают алидаду на 90° (устанавливают ее по третьему винту) и приводят пузырек уровня в нульпункт.

При произвольной установке алидады пузырек должен оставаться в нульпункте. Если пузырек отклоняется от нульпункта больше, чем на одно деление, горизонтирование теодолита повторить.

б) Поверка цилиндрического уровня. Цилиндрический уровень предназначен для установления оси вращения теодолита в вертикальное положение. Тогда условие их взаимного положения формулируется так: ось уровня должна быть перпендикулярной оси вращения прибора. При повороте прибора вокруг его оси ось уровня должна описывать в пространстве горизонтальную плоскость и, после поворота прибора на 180°, пузырек остается в нульпункте.

Пусть угол между осью уровня и осью вращения прибора равен не 90°, а (90° - φ) (рис. 49, а). Если установить ось уровня в горизонтальное положение, то ось вращения прибора будет наклонена на угол φ относительно своего правильного положения. Задача поверки – определить угол φ и устранить его.

Повернем прибор на 180° (рис. 49, б). Ось уровня опишет коническую поверхность с углом при вершине конуса 180° - 2φ и займет не горизонтальное положение, а наклонится относительно горизонта на угол $\varphi = 2\nu$ – внешний угол треугольника.

Чтобы условие выполнялось, нужно, во-первых, изменить угол между осью уровня и осью вращения прибора на величину ν и, во-вторых, на этот же угол наклонить прибор. Практически поступают так: сначала подъемными винтами наклоняют прибор на угол ν; при

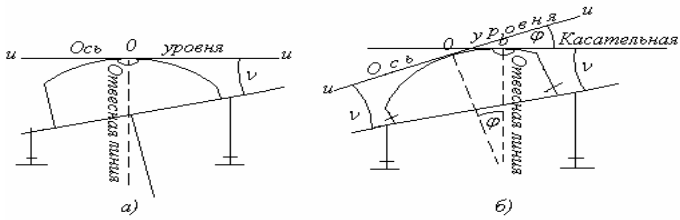


Рис. 49

этом пузырек приближается к нульпункту на половину дуги отклонения. Затем исправительными винтами уровня изменяют положение ампулы в корпусе прибора так, чтобы пузарек установился точно в нульпункте. Таким образом, последовательность действий при поверке и юстировке уровня следующая:

1 – установить уровень параллельной двум подъемным винтам и ими привести пузырек в нульпункт;

2 – повернуть прибор точно на 180° и сосчитать количество делений n отклонения пузырька от нульпункта;

3 – подъемными винтами сместить пузырек к нульпункту на n/2 делений;

4 – исправительными винтами уровня привести пузырек в нульпункт.

Если угол наклона большой, то после поворота прибора на 180° пузырек уходит за пределы шкалы и количество делений n сосчитать нельзя. В этом случае отклонения пузырька от нульпункта можно измерить в оборотах подъемных винтов.

в) Поверка перпендикулярности визирной оси трубы к оси вращения трубы выполняется с помощью отсчетов по горизонтальному кругу при наблюдении какой-либо визирной цели. Если условие выполняется, то при вращении трубы вокруг своей оси визирная линия трубы описывает плоскость, совпадающую с коллимационной плоскостью. Если угол между указанными осями не равен 90°, то при вращении трубы визирная линия описывает коническую поверхность с углом при вершине конуса, равным 180° - 2с, где *с* – угол между фактическим положением визирной линии

трубы и ее теоретическим положением называется коллимационной ошибкой (рис. 50).

Поверка этого условия выполняется наведением трубы на удаленную визирную цель при двух положениях вертикального круга: ”круг лево” − КЛ или L и “круг право” − КП или R. Отсчеты при “круге лево” и “круге право” отличаются ровно на 180°, если 2c = 0. Если же c ≠ 0, то коллимационная ошибка определяется как разность отсчетов при двух положениях круга:

$$2c = L - R.,$$

где L и R - отсчеты по горизонтальному кругу при «круге лево» и «круге право» соответственно.

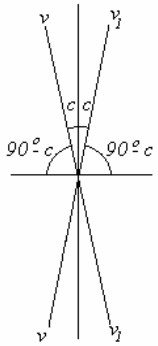


Рис. 50

Исправление коллимационной ошибки, если она она больше допустимого значения, производится следующим способом: вычисляют правильный отсчет $L_0 = L - c$ или $R_0 + c$ и устанавливают его на лимбе. При этом изображение визирной цели не будет совпадать с центром сетки нитей на величину c. Боковыми исправительными винтами сетки нитей совмещают центр сетки нитей с визирной целью, после чего повторяют определение 2c.

г) Для поверки перпендикулярности оси вращения трубы к оси вращения алидады используется хорошо видимая высокорасположенная точка *M*. Сначала наводят трубу на эту точку при КЛ и проектируют ее на уровень теодолита; ее проекция будет точка m_1. То же самое выполняют при КП, отмечая проекцию m_2 (рис. 51). Если условие выполняется, то обе проекции точки *M* сольются в одну точку. В противном случае теодолит необходимо сдать в мастерскую

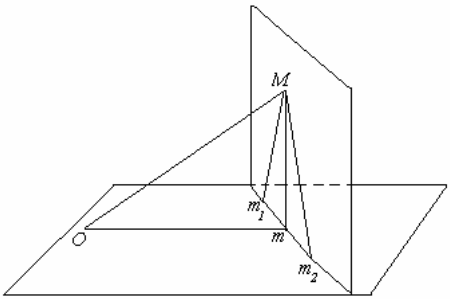


Рис. 51

д) Поверку сетки нитей выполняют следующим образом.

Наводят трубу на хорошо видимую точку и наводящим винтом смещают ее по высоте. Если изображение точки остается на вертикальной нити сетки нитей, то нить находится в коллимационной плоскости. Если изображение точки сходит с нити, то нужно ослабить боковые исправительные винты сетки нитей и развернуть сетку в нужном направлении. После этого повторить поверку и определить коллимационную ошибку.

Кроме геометрических условий у теодолита проверяют механические условия:

− отсутствие механических повреждений – изломов, изгибов, трещин и т.п.;

− плавность вращения всех вращающихся деталей;

− плавность и легкость работы зажимных винтов;

− плавность и равномерность работы наводящих винтов;

− равномерность и легкость работы подъемных винтов.

4.2.5. Измерение горизонтальных и вертикальных углов

Перед измерением угла необходимо привести теодолит в рабочее положение, то есть выполнить три операции: центрирование, горизонтирование (нивелирование) и установку зрительной трубы.

Центрирование теодолита − это установка оси вращения алидады над вершиной измеряемого угла; операция выполняется с помощью отвеса, подвешиваемого на крючок станового винта, или с помощью оптического центрира (если последний имеется у теодолита)

Горизонтирование (нивелирование) теодолита − установка оси вращения алидады в вертикальное положение (соответственно; плоскости лимба горизонтального круга − в горизонтальное); операция выполняется с помощью подъемных винтов и уровня на алидаде горизонтального круга.

Установка трубы – это установка трубы по глазу и по предмету; операция выполняется с помощью подвижного окулярного кольца (установка по глазу – фокусирование сетки нитей) и винта фокусировки трубы на предмет.

Измерение горизонтальных углов выполняется строго по методике, соответствующей способу измерения. Известно несколько способов измерения горизонтальных углов: способ отдельного угла (способ приемов), способ круговых приемов, способ во всех

комбинациях и др. При измерении углов в теодолитных ходах используется в основном первый способ.

Измерение отдельного угла складывается из следующих действий:

1 – наведение трубы на точку, фиксирующую направление первой стороны угла, при «круге лево» (КЛ), взятие отсчета L_1;

2 – поворот алидады по часовой стрелке и наведение трубы на точку, фиксирующую направление второй стороны угла; взятие отсчет L_2;

3 − вычисление угла при КЛ : $\beta_л = L_2 - L_1$;

4 – перестановка лимба на 1° - 2° для теодолитов с односторонним отсчитыванием;

5 – переведение трубы через зенит и наведение ее на точку, фиксирующей направление первой стороны угла, при «круге право» (КП), взятие отсчета R_1;

6 – поворот алидады по ходу часовой стрелки и наведение трубы на точку, фиксирующую направление второй стороны угла, при «круге право», взятие отсчета R_2;

7 – вычисление угла при КП: $\beta_п = R_2 - R_1$;

8 − при выполнении условия $|\beta_л - \beta_п| \leq 1.5t$, где t – точность теодолита, вычисляется среднее значение угла: $\beta_{ср} = 0.5(\beta_л + \beta_п)$.

Измерение угла при одном положении круга (КЛ или КП) составляет один полуприем; полный цикл измерения угла при двух положениях круга составляет один прием.

Измерение вертикальных углов. Вертикальный угол – это плоский угол, лежащий в вертикальной плоскости. К вертикальным углам относятся угол наклона и зенитное расстояние Угол между горизонтальной плоскостью и направлением линии местности называется углом наклона и обозначается буквой ν. Углы наклона бывают положительными и отрицательными. Угол между вертикальным направлением и направлением линии местности называется зенитным расстоянием и обозначается буквой Z. Зенитное расстояние всегда положительно.

Угол наклона и зенитное расстояние одного направления связаны соотношением:

$$Z + \nu = 90^o, \quad \text{откуда} \quad \nu = 90^o - Z \quad \text{или} \quad Z = 90^o - \nu. \qquad (4.14)$$

Для измерения вертикальных углов предназначен вертикальный круг теодолита.

Вертикальный круг большинства теодолитов устроен следующим образом: лимб жестко соединен с трубой, центр лимба совмещен с геометрической осью вращения трубы, а его плоскость перпендикулярна этой оси. Лимбы вертикальных кругов имеют надписи делений различных типов: либо от 0° до 360° по ходу часовойстрелки (I тип), либо от 0° до 90° против хода часовой стрелки (II тип) и т.д. Для отсчета по лимбу имеется алидада. Основные части алидады: отсчетное приспособление, цилиндрический уровень, микрометренный винт.

Пузырек уровня в момент отсчета приводится в нульпункт, то есть ось уровня служит указателем горизонтального направления. Отсчетным указателем является нулевой штрих отсчетного приспособления. *Ось уровня и линии, соединяющей отсчетный указатель с центром лимба, должны быть параллельны;* при выполнении этого условия линия отсчетного указателя будет горизонтальна в момент взятия отсчета по вертикальному кругу.На практике это условие не всегда выполняется и имеет место так называемое место нуля (*M0*). Место нуля вертикального круга – это отсчет по лимбу вертикального круга при горизонтальном положении визирной оси трубы и оси уровня вертикального круга.

Для конкретного теодолита формулы для вычисления угла наклона и места нуля приводятся в паспорте. Для теодолита 2Т30 эти формулы имеют вид:

$$M0 = 0.5(N_L + N_R); \quad \nu = 0.5(N_L - N_R) = N_L - M0 = M0 - N_R, \qquad (4.15)$$

где N_L и N_R − отсчеты по вертикальному кругу при положении КЛ и КП соответственно.

Положение вертикального круга, при котором отсчет по лимбу вертикального круга равен (с точностью до *M0*) углу наклона считается основным; у большинства современных теодолитов основным является положение КЛ.

Для измерения угла наклона удобно иметь *M0* близким к нулю, поэтому нужно выполнять поверку места нуля, которая предусматривает следующие действия:

− наведение трубы на точку при КЛ, приведение пузырька уровня

в нульпункт и взятие отсчета по вертикальному кругу;

− перевод трубы через зенит, наведение трубы на точку при КП, приведение пузырька уровня в нульпункт и взятие отсчета по вертикальному кругу;

− вычисление по соответствующим формулам *M0* и угла наклона.

Если $M0 \geq 2t$ (t – точность отсчитывания по шкале вертикального круга теодолита), то при основном положении круга навести трубу на точку и микрометренным винтом алидады установить отсчет, равный углу наклона. Отклонившийся пузырек исправительными винтами уровня привести в нульпункт. В теодолитах, не имеющих уровня при алидаде вертикального круга (например, у теодолитов Т30 и 2Т30), исправление *M0* выполняется перемещением горизонтальной нити исправительными винтами сетки нитей.

В некоторых геодезических приборах (точных теодолитах и нивелирах) вместо уровня применяется компенсатор небольших углов наклона осей прибора.

Существуют жидкостные, механические и оптико-механические компенсаторы. Наиболее часто применяются оптико-механические компенсаторы, в которых главным узлом является подвесное маятниковое устройство. На этом устройстве укреплены оптические детали или системы, предназначенные либо для изменения направления оси приборая, либо для параллельного смещения направления оси прибора. Непременной составной частью оптико-механического компенсатора является демпфер, предназначенный для гашения или ослабления собственных колебаний маятниковой подвесной системы. Оптико-механический компенсатор, заменивший уровень при алидаде вертикального круга точного теодолита, освободил наблюдателя от необходимости устанавливать пузырек уровня на середину перед отсчетом по вертикальному кругу, что существенно сократило время на измерение углов наклона.

4.2.6. Математическая обработка теодолитного хода

Одной из задач математической обработки результатов измерений является распределение невязок между измерениями путем введения в них поправок по определенным математическим

правилам. Напомним, что невязкой называется разность между измеренным и теоретическим значениями определяемой величины. Процесс распределения невязок называется уравниванием. Уравненные величины удовлетворяют определенным геометрическим условиям, например, сумма уравненных углов линейно-углового хода должна равняться теоретической.

Все вычисления при обработке теодолитных ходов производятся в так называемых ведомостях координат.

а) Уравнивание углов теодолитного хода. После проверки полевых вычислений измеренные значения углов β_i переписываются в графу «измеренные углы» ведомости координат и вычисляется их сумма $\Sigma\beta_i$. Угловая невязка вычисляется по формуле

$$f_\beta = \sum_1^n \beta_i - \sum_1^n \beta_m, \qquad (4.16)$$

где $\sum_1^n \beta_m$ - теоретическая сумма углов полигона (n-угольника), равная

$$\sum_1^n \beta = 180(n-2). \qquad (4.17)$$

Прежде, чем распределить полученную по (4.16) невязку на все углы, надо определить, допустима ли она (не является ли она результатом влияния грубых ошибок, имеющихся в измерениях или вычислениях). Для углов, измеренных теодолитом с $t=30''$, допустимая невязка определяется по формуле

$$f_{\beta доп} = \pm 1' \sqrt{n}. \qquad (4.18)$$

Если угловая невязка допустима, ее рапределяют на все углы поровну (принимая, что измерения всех углов рвноточны), при этом поправки δ в углы имеют знак, обратный знаку невязки,

$$\delta = - f_\beta / n. \qquad (4.19)$$

Полученная невязка очень редко делится на n без остатка, вследствие чего в разные углы приходится вводить разные по величине поправки. Обычно большие по величине поправки вводят в углы с короткими сторонами, так как они измерены с большей

ошибкой (главным образом вследствие ошибок центрирования теодолита и установки вех над точками хода).

Сумма поправок в углы должна равняться невязке, взятой с противоположноым знаком

$$\sum_{1}^{n}\delta = - f_{\beta} .$$

Сумма уравненных углов должна равняться теоретической сумме.

Невязку в сумме углов разомкнутого хода вычисляется по формуле

$$f_{\beta} = \sum_{1}^{n+1}\beta_i - (\alpha_к - \alpha_н) + (n + 1)180, \qquad (4.20)$$

где $\alpha_н$ и $\alpha_к$ − дирекционные углы первой и последней сторон теодолитного хода.

Распределение невязок в углах разомкнутого хода выполняется по тем же правилам, что и в замкнутом полигоне.

б) Вычисление дирекционных углов. Для получения координат точек теодолитного хода нужно знать дирекционные углы и горизонтальные проложения линий. Зная дирекционный угол одной линии, можно вычислить дирекционные углы остальных линий хода.

В зависимости от вида и точости съемки дирекционный угол одной линии можно получить одним из методов:

1) астрономическим – определением истинного азимута из наблюдения светил с введением поправки за сближение меридианов;
2) путем привязки хода к пунктам государственной сети;
3) наблюдением по буссоли с учетом магнитного склонения.

Для вычисления дирекционного угла теодолитного хода воспользуемся правилом: угол между линиями равен разности дирекционных углов этих линий (рис. 52):

$$B_1 = (P_1 P_2) - (AB) = \alpha_{12} - (\alpha_{BA} + 180^{\circ}),$$

откуда

$$\alpha_{12} = \alpha_{BA} + \beta_1 + 180^{\circ}. \qquad (4.21)$$

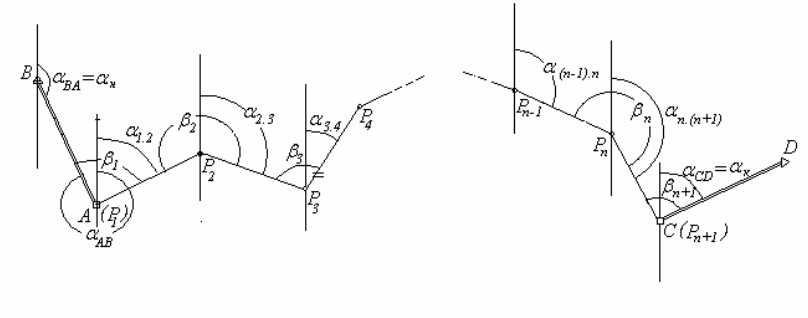


Рис. 52

Если дирекционный угол начальной стороны получен одним из вышеуказанных методов, то дирекционные углы остальных сторон вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} &\alpha_{12} = \alpha_н + \beta_1 + 180^\circ, \\ &\alpha_{23} = \alpha_{12} + \beta_2 + 180^\circ, \\ &\qquad \dots \\ &\alpha_{n.(n+1)} = \alpha_{n-1,n} + \beta_n + 180^\circ \\ &\alpha_к = \alpha_{n(n+1)} + \beta_{n+1} + 180^\circ. \end{aligned} \qquad (4.22)$$

Углы β_1 и β_{n+1} называются примычными (примыкающие к жестким сторонам *AB* и CD).

Складывая уравнения (4.22), получим

$$\alpha_к = \alpha_н + \sum_1^{n+1}\beta_i + (n+1)180^\circ,$$

откуда

$$\sum_1^{n+1}\beta_i = \alpha_к - \alpha_н - (n+1)180^\circ. \qquad (4.23)$$

Таким образом, дирекционные углы сторон теодолитного хода последовательно вычисляются по известным формулам передачи дирекционного угла через углы поворота:

для левого угла $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \beta_{i+1} + 180°$,

для левого угла $\alpha_{i+1} = \alpha_i - \beta_{i+1} + 180°$.

Равенство (4.23) будет удовлетворяться только в случае безошибочных измерений горизонтальных углов и поэтому их

сумма называется теоретической. Разность между суммой измеренных углов и теоретической суммой называется невязкой углов разомкнутого хода и вычисляется по (4.20).

в) Вычисление координат точек теодолитного хода. Разность координат конечной и начальной точек линии называется приращением координат. Так, для линии P_1P_2 приращения координат будут

$$\Delta x_{12} = x_2 - x_1, \quad \Delta y_{12} = y_2 - y_1.$$

.

В геодезии большое практическое значение имеют две задачи.

1) Прямая геодезическая задача − по координатам начальной точки отрезка прямой (x_1, y_1), его длине (s_{12}) и направлению (α_{12}) нужно найти координаты конечной точки отрезка (x_2 , y_2). Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$\Delta x_{12} = s_{12} \cos\alpha_{12}, \quad \Delta y_{12} = s_{12} \sin\alpha_{12}; \qquad (4.24)$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x_{12} = x_1 + s_{12} \cos\alpha_{12}, \quad y_2 = y_1 + \Delta y_{12} = y_1 + s_{12} \sin\alpha_{12}. \qquad (4.25)$$

2) Обратная геодезическая задача − по координатам начальной (x_1, y_1) и конечной (x_2,y_2) точек отрезка прямой нужно найти длину и направление этого отрезка. Решается обратная геодезическая задача следующим образом:

$$\Delta x_{12} = x_2 - x_1, \qquad (4.26)$$

$$\Delta y_{12} = y_2 - y_1. \qquad (4.27)$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$tg\alpha_{12} = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1);$$

$$s_{12} = (x_2 - x_1)/\cos\alpha_{12} = (y_2 - y_1)/\sin\alpha_{12};$$

$$s_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

При математической обработке теодолитного хода используется решение прямой геодезической задачи: последовательно для каждой

линии вычисляются по (4.24) приращения координат и по (4.25) – координаты каждой точки хода.

В замкнутом ходе теоретическая сумма приращений координат равна нулю. Тогда невязка по координатам вычисляется по следующим формулам

$$f_x = \Sigma\Delta x_{выч} - \Sigma\Delta x_{теор} = \Sigma\Delta x_{выч} - 0 = \Sigma\Delta x_{выч}\,,$$
$$f_y = \Sigma\Delta y_{выч} - \Sigma\Delta y_{теор} = \Sigma\Delta y_{выч} - 0 = \Sigma\Delta y_{выч}\,. \qquad (4.28:)$$

Общая невязка подсчитывается по формуле

$$f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{(\Sigma\Delta x_{вы})^2 + (\Sigma\Delta y_{выч})^2}\,. \qquad (4.29)$$

Если известны координаты начальной и конечной точек разомкнутого хода, то, вычисляя приращения координат всех сторон хода, переходят к вычислению невязок f_x и f_y на основании следующих соображений.

$$x_к - x_н = \Sigma\Delta x_{теор}\,; \qquad y_к - y_н = \Sigma\Delta y_{теор}\,.$$

$$f_x = \Sigma\Delta x_{выч} - \Sigma\Delta x_{теор} = \Sigma\Delta x_{выч} - (x_к - x_н),$$
$$f_y = \Sigma\Delta y_{выч} - \Sigma\Delta y_{теор} = \Sigma\Delta y_{выч} - (y_к - y_н)\,. \qquad (4.30)$$

Общая невязка координат точек разомкнутого теодолитного хода вычисляется по формуле (4.29).

С увеличением длины хода увеличиваетсч и предел допустимой общей невязки хода. По этой причине для простоты расчетов принимается, что при благоприятных условиях измерений в полигоне с длинными сторонами невязка должна быть меньше 1/2000 длины хода, при средних условиях − в пределах 1/1500 и при неблагоприятных условиях − 1/1000.

Введение поправок в приращения координат выполняется пропорционально длинам сторон хода по формулам

$$\delta x_i = -(f_x/\Sigma s)\cdot s_i\,, \quad \delta y_i = -(f_y/\Sigma s)\cdot s_i. \qquad (4.31)$$

Сумма исправленных приращений координат должна равняться теоретической как в сомкнутом (полигоне), так и разомкнутом ходах:

$$\Sigma\delta x_i = -f_x, \quad \Sigma\delta_i = -f_y.$$

4.3. Измерение превышений

Одной из важнейших характеристик местности является ее рельеф. Отметку точки на местности можно определить по превышениям этой точки относительно другой, отметка которой известна. Процес измерения превышения одной точки относительно другой называется нивелированием.

Начальной точкой счета высот в нашей стране является нуль Кронштадского футштока (горизонтальная черта на медной пластине, прикрепленной к устою одного из мостов Кронштадта). От этого футштока идут ходы нивелирования, образующие государственную сеть нивелирования в Балтийской (над уровнем Балтийского моря) системе высот. Отметки пунктов этой сети собраны в списки – “Каталоги высот”.

Для нахождения отметки любой точки местности нужно измерить ее превышение относительно пункта с известной отметкой. Для решения различных задач отметки пунктов определяют в абсолютной (при создании государственной нивелирной сети, изучении формы и размеров Земли и др.) и условной (для создания локальных сетей при строительстве инженерно-технических сооружений, на специальных геодинамических полигонах и др.) системах.

Превышения могут быть определены различными приборами и разными способами. Различают следующие виды нивелирования:

− геометрическое нивелирование (нивелирование горизонтальным лучом);

− тригонометрическое нивелирование (нивелирование наклонным лучом);

− барометрическое нивелирование;

− гидростатическое нивелирование;

− механическое нивелирование и др.

4.3.1. Геометрическое нивелирование

Геометрическое нивелирование или нивелирование горизонтальным лучом выполняется специальным геодезическим прибором – нивелиром. Отличительная особенность нивелира состоит в том, что визирная ось трубы во время работы приводится в горизонтальное положение.

Различают два вида геометрического нивелирования: нивелирование из средины и нивелирование вперед.

При нивелировании из средины нивелир устанавливают посредине между точками *A* и *B*, на которых устанавливаются рейки с делениями (рис.53).

При движении из точки *A* к точке *B* рейка, стоящая на точке *A*, называется задней, а на точке *B* – передней. Сначала наводят трубу на заднюю рейку и берут отсчет а, затем трубу наводят на переднюю рейку и берут отсчет *b*. Превышение точки *B* над точкой А получают по формуле

$$h = a - b. \qquad (4.32)$$

Если $a > b$, то превышение − положительное, при $a < b$ – отрицательное. Отметка точки В вычисляется по формуле:

$$H_B = H_A + h. \qquad (4.33)$$

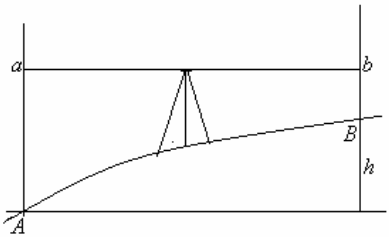


Рис. 53

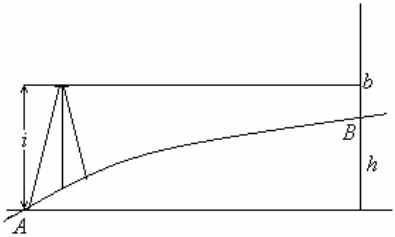


Рис. 54

Отметка визирного луча на станции называется горизонтом нивелира и при нивелировании из средины равна

$$H_г = H_A + a = H_B + b, \qquad (4.34)$$

где H_A и H_B − отметки точек A и B.

При нивелировании вперед нивелир устанавливают над точкой A так, чтобы окуляр трубы был на одной отвесной линии с точкой A. На точку B ставят рейку. Измерив высоту нивелира i над точкой A, берут отсчет b по рейке (рис. 54). Превышение вычисляют по формуле

$$h = i - b. \qquad (4.35)$$

Если точки A и B находятся на большом расстоянии одна от другой и превышение между ними нельзя измерить с одной станции (установки нивелира), то на линии AB намечают промежуточные (переходные) точки и измеряют превышения по частям (рис. 55).

На первом участке A-1 берут отсчеты по задней и передней рейкам, затем переносят нивелир в средину второго участка, а рейку с точки A переносят в точку 2, берут отсчеты по задней и передней рейкам, перносят нивелир в средину следующего участка, а заднюю рейку переносят вперед и т.д. Превышение между точками A и B будет равно:

$$h_{AB} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^{n+1} b_i . \qquad (4.36)$$

Отметка точки B получится по формуле:

$$H_B = H_A + \sum_{i=1}^{n+1} h_i. \qquad (4.37)$$

Последовательное нивелирование всех станций линии AB составляет нивелирный ход.

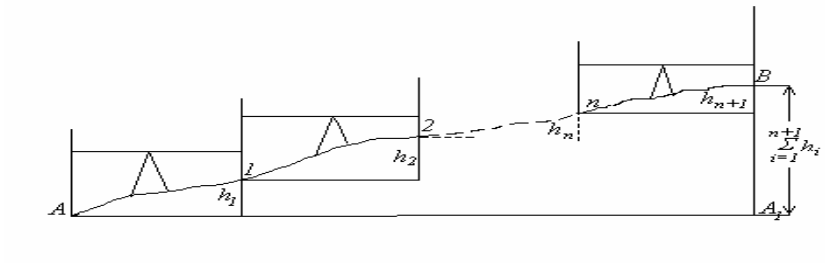


Рис. 55

а) *Влияние кривизны Земли и рефракции на измеряемое превышение*. Уровенные поверхности не являются плоскими, поэтому рейки, установленные в точках *A* и *B* перпендикулярно уровенным поверхностям будут непараллельны между собой. Визирная ось трубы нивелира, установленного между точками *A* и *B*, горизонтальна и пересекла бы рейки в точках *C* и *D*, если бы световой луч распространялся в атмочфере строго прямолинейно. Уровенная поверхность нивелира *J* пересекает рейки в точках *E* и *F*. Превышение точки *B* относительно точки *A* будет равно разности отрезков *EA* и *FB:*

$$h = EA - FB.$$

Далее, из рис. 56 следует: $EA = AC - EC$ и $FB = BD - DF$.

Отрезки *EC* и *DF* выражают влияние кривизны Земли на высоту точек, которое зависит от расстояния *S* и радиуса *R*. Согласно формуле (2.3) отрезки *EC* и *DF* будут равны:

$$EC = k_1 = S_1^2/2R, \quad FD = k_2 = S_2^2/2R,$$

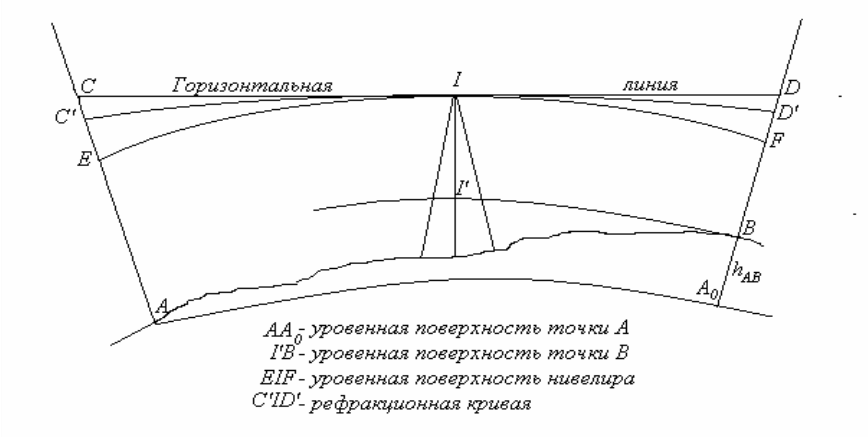


Рис. 56

где S_1 и S_2 − расстояния от нивелира до точек *A* и *B* соответственно.

Однако в реальной атмосфере луч света идет не по прямой. Атмосфера по плотности неоднородна, ее приземные слои обычно плотнее верхних: чем выше, тем плотность меньше. Расположение атмосферы по плотности можно представить схематически в виде

слоев воздуха, параллельных земной поверхности (рис. 57).

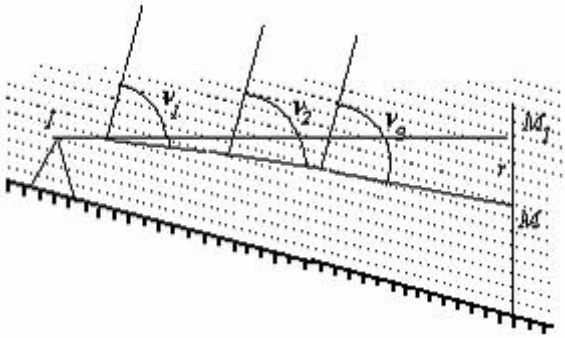


Рис. 57

Световой луч, вышедший из точкий *M*, будет преломляться на границах воздушных слоев каждый раз все под меньшим углом к нормали. Полагая слои воздуха очень тонкими, ход луча из точки *M* в глаз наблюдателя, нахоящегося в точке *N*, можно представить в виде плавной кривой, обращенной своей вогнутостью вниз. Наблюдатель из точки *N* увидит световую точку *M* в положении M_1 − по касательной к этой кривой в точке наблюдения, т. е. отклонившейся от своего действительного положения.

Отклонение светового луча вследствие преломления его в слоях атмосферы различной плотности называется рефракцией.. Кривая хода светового луча в атмосфере называется *рефракционной кривой.* Таким образом, в реальной атмосфере луч света идет по рефракционной кривой, занимая положение $C'ID'$ (рис. 57), и отсчеты по рейкам будут равны отрезкам: $a=C'A$ и $b=D'B$, т. е. предмет виден несколько выше своего действительного положения, а отрезки CC' и DD' выражают влияние рефракции. Рефракционную кривую принимают за дугу окружности радиуса R_1. Отношение $R/R_1 = K$ называется коэффициентом вертикальной рефракции, среднее значение которого равно 0.16 (в течение суток может изменяться в пределах 0.11−0.22).

Для отрезков CC' и DD' получаем следующие выражения:

$$CC' = r_1 = S_1^2/2R_1 \quad \text{и} \quad DD' = r_2 = S_2^2/2R_2,$$

где S_1 и S_2 − расстояния от нивелира до передней (переднее плечо) и задней (заднее плечо) реек, R_1 и R_2 − радиусы кривизны рефракционных кривых заднего и переднего плеч.

Если принять, что на одной станции $R_1 = R_2 = R/K$, то влияние рефоракции на отсчеты по рейкам будет

$$r_1 = (S_1^2/2R)K, \quad r_2 = (S_2^2/2R)K.$$

С учетом совместного влияния кривизны уровенной поверхности и рефракции на результаты геометрического нивелирования измеренное превышение будет равно:

$$h = (a + k_1K - k_1) - (b + k_2K - k_2) = (a - b) - [k_1(1 - K) - k_2(1 - K)].$$

Обозначим через f совместное влияние кривизны и рефракции на отсчет по рейке

$$f_1 = k_1(1 - K), \quad f_2 = k_2(1 - K).$$

Тогда

$$h = (a - b) - (f_1 - f_2). \qquad (4.38)$$

Как видно из вывода, при равенстве расстояний от нивелира до рейки $f_1 = f_2$. Поэтому при нивелировании строго из средины влияние кривизны Земли и рефракции исключаются.

б) Нивелиры; их устройство и поверки. В настоящее время нивелиры всех типов выпускаются либо с уровнем при трубе, либо с компенсатором наклона визирной линии трубы.

Важнейшей частью нивелира с уровнем являются уровень и зрительная труба. Для приведения визирной оси трубы в горизонтальное положение служит элевационный винт: с его помощью поднимают или опускают окулярный конец трубы. При этом пузырек уровня перемещается и при его расположении в нуль-пункте визирная линия должна устанавливаться горизонтально.

В современных нивелирах изображения концов цлиндрического уровня через систему призм передаются в поле зрения трубы (такие уровни назывются контактными) и наблюдатель видит сразу и рейку, и уровень.

Для нивелира с уровнем выполняются три поверки.

1. Ось цилиндрического уровня и визирная линия трубы должны быть параллельны ($UU_1 || VV_1$) и лежать в параллельных вертикальных плоскостях – это условие называется главным условием нивелира с уровнем при трубе. Первая часть главного условия поверяется двойным нивелированием вперед. На местности забивают два колышка на расстоянии около 50 м один от другого. Нивелир устанавливают над точкой *A* так, чтобы окуляр трубы находился на одной вертикальной линии с точкой (рис. 58, а). От колышка до центра окуляра измеряют высоту инструмента *i*. Затем рейку ставят в точку *B*, наводят на нее трубу нивелира, приводят пузырек уровня в нуль-пункт и берут отсчет по рейке b_1. Затем нивелир и рейку меняют местами, измеряют высоту инструмента i_2, приводят пузырек уровня в нуль-пункт и берут отсчет по рейке b_2 (рис. 58, б).

Если главное условие не выполняется, то вместо правильного отсчета b^0_1 получается ошибочный отсчет b_1. Обозначив ошибку отсчета *x*, получим превышение точки *B* относительно точки *A:*

$$h = i_1 - (b_1 + x).$$

При положении нивелира в точке *B* превышение точки *A* относительно точки *B* будет:

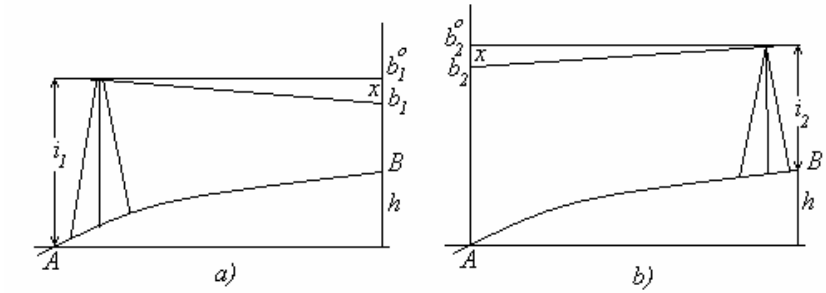


Рис. 58

$$h' = i_2 - (b_2 + x).$$

Так как $h = -h'$, то

$$i_1 - (b_1 + x) = - i_2 + (b_2 + x).$$

Отсюда получаем

$$x = 0.5(i_1 + i_2) - 0.5(b_1 + b_2) \qquad (4.39)$$

Если x получается больше 4 мм, необходимо выполнить юстировку уровня. Для этого элевационным винтом наклоняют трубу нивелира до тех пор, пока отсчет по рейке не будет равен правильному отсчету:

$$b^0_2 = b_2 + x,$$

при этом пузырек уровня уйдет из нульпункта. Исправительными винтами уровня приводят пузырек в нуль-пункт и для контроля правильности юстировки повторяют поверку заново.

2. Ось круглого уровня должна быть параллельна оси вращения нивелира. Приводят пузырек круглого уровня в нуль-пункт, затем поворачивают нивелир на 180°. Если пузырек отклонился от нуль-пункта, то на половину отклонения его перемещают с помощью подъемных винтов и на половину – исправительными винтами круглого уровня.

3. Горизонтальная нить сетки нитей должна быть перпендикулярна оси вращения нивелира. Рейку ставят в 30-40 м от нивелира и закрепляют ее, чтобы не качалась. Затем берут отсчеты по рейке при трех положениях ее изображения: в центре поля зрения (совместив вертикальную нить с осью рейки), слева от центра и справа (левым и правым краями горизонтальной нити). Если отсчеты отличаются один от другого более, чем на 1 мм, то сетку нитей нужно развернуть, расслабив предварительно ее закрепительные винты.

в) Обработка нивелирного хода. Ходы технического нивелирования прокладываются между реперами с известными отметками. При этом как в сомкнутом (рис. 59, а), так и разомкнутом (рис. 59, б), ходах нивелирование выполняется один раз − в прямом направлении. Висячий ход (опирающийся на один

репер с известной отметкой – рис. 59, в) нивелируется дважды: прямо и обратно. Допустимая невязка f_h не должна превышать 50 мм на 1 км хода, а на весь ход

$$f_h \leq 50\sqrt{L},$$

где L – длина хода в км.

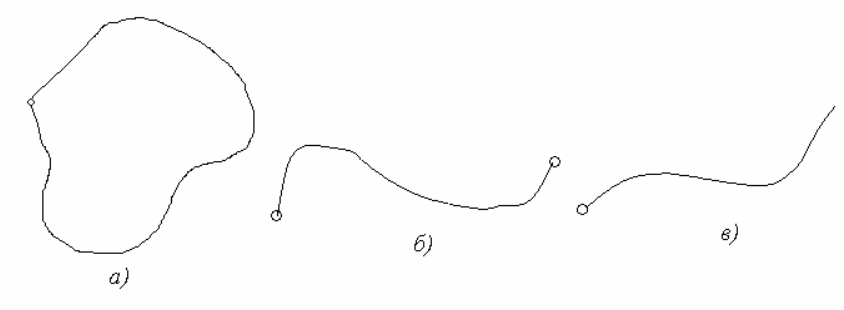


Рис. 59

Длина хода технического нивелирования зависит от его формы: разомкнутого и сомкнутого ходов она может достигать 16 км, висячего – не более 8 км..

Часть хода между двумя закрепленными на местности точками хода (реперами) называется секцией, длина которой определяется суммой расстояний от нивелира до реек. Превышение между реперами определяется суммой превышений, измеренных на каждой станции секции:

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_{i.} \qquad (4.40)$$

В замкнутых ходах (полигонах) теоретически $\Sigma h_{i,теор..}=0$, практически же, вследствие ошибок измерений, $\Sigma h_{i,пр..} \neq 0$. Разность этих сумм составляет невязку нивелирного полигона

$$f_h = \sum_{i=1}^{n} h_{i,пр} - \sum_{ii=1}^{n} h_{i,теор} \quad \text{или} \quad f_h = \sum_{i=1}^{n} h_{i,пр}. \qquad (4.41).$$

Невязка полигона распределяется с противоположным знаком пропорционально длинам секций r_i, то есть поправка в превышение каждой секции будет равна

$$\delta_h = -f_h r_i / n, \qquad (4.42)$$

где i − номер секции, n – число секций в ходе. Контроль вычисления поправок выполняется по формуле

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{h,i} = -f_h .$$

Отметки реперов хода определяются по формуле:

$$H_{i+1} = H_i + h_i, \qquad (4.43)$$

где H_i – известная отметка предыдущего репера, полученная по результатам нивелирования от исходного репера; h_i − исправленное превышение.

В разомкнутом ходе невязка определяется по формуле:

$$f_h = \Sigma h_{i,пр} - (H_{i+1} - H_i), \qquad (4.44)$$

где H_{i+1} и H_i − известные отметки реперов, на которые опирается нивелирный ход. Поправки в превышения определяемых точек и вычисление отметок последних выполняется по формулам (4.42) и (4.43).

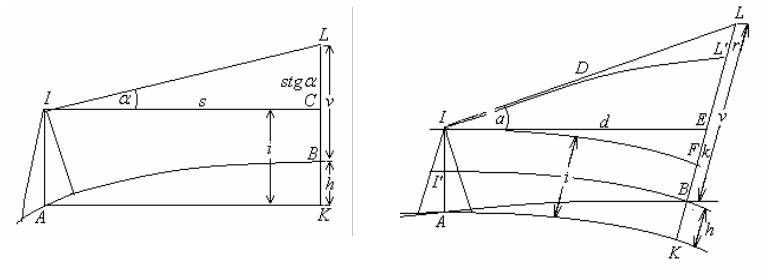
4.3.2. Тригонометрическое нивелирование

Тригонометрическое нивелирование (наклонным лучом) выполняется теодолитом. Для определения превышения измеряются угол наклона и расстояние по нитяному дальномеру (рис.60, а)

Из рис. 60, б видно, что превышение равно:

$$h = dtg\alpha + i - v + f, \qquad (4.45)$$

где α – угол наклона визирного луча, $d = Dcos\alpha$ − горизонтальное проложение, D − наклонная дальность (расстояние, измеренное ни-



а) б)

Рис. 60

тяным дальномером), i − высота инструмента, измеряемая от точки A до оси вращения трубы, v − высота наведения визирного луча (на рисунке – высота рейки), f - поправка за кривизну и рефракцию.

Ошибка измерения превышения, полученного из тригонометрического нивелирования, зависит от угла наклона и оценивается величиной от 2 до 10 см на 100 м расстояния; при углах наклона $\alpha \leq 3^\circ$ и $d < 300$ м влиянием кривизны и рефракции на определение превышения можно пренебречь.

При последовательном измерении превышений получается высотный ход. В высотном ходе вертикальные углы измеряются дважды: в прямом и обратном направлениях.

4.3.3. Понятие о барометрическом нивелировании

Барометрическое нивелирование основано на зависимости атмосферного давления от высоты точки над уровнем моря. Известно, что с увеличением высоты на 11 м давление падает примерно на 1 мм ртутного столба.

Приближенные значения превышения между точками 1 и 2 можно вычислить по так называемым сокращенным формулам, в которых значения некоторых параметров состояния атмосферы приняты постоянными. Наиболее простой и удобной для вычисления разности высот является формула барометрических ступеней

$$h = H_2 - H_1 = \Delta H(P_1 - P_2),$$

где P_1 и P_2 – давление в первой и второй точках, ΔH – барометрическая ступень, выбираемая из специальных таблиц. Под барометрической ступенью понимается разность высот, соответствующая изменению атмосферного давления на 1 мм рт ст. и равная в среднем 11 м.

Наиболее распространенными являются следующие способы барометрического нивелирования:

1) способ замкнутых ходов, опирающихся на временные барометрические станции (ВБС), расположенные на пунктах с известными отметками;
2) способ замкнутых или разомкнутых ходов без опоры на ВБС между точками с известными отметками;
3) способ разомкнутых ходов между точками с известными отметками с учетом изменения атмосферного давления во времени по наблюдениям рейсовыми приборами на точках хода (способ скачущей станции);
4) способ барических базисов.

Общим для всех способов является порядок наблюдения на барометрических станциях и рейсовых точках. Специфические особенности каждого из перечисленных способов указаны в соответствующих инструкциях и техническом задании.

Точность барометрического нивелирования невысока: средняя квадратическая ошибка измерения превышения колеблется от 0.3 м в равнинных районах до 2 м и более в горных. Применяется барометрическое нивелирование в основном при выполнении геологических и геофизических (гравиметрических) съемок.

4.3.4. Понятие о гидростатическом нивелировании

Гидростатическое нивелирование выполняется с помощью сообщающихся сосудов, заполненных одной жидкостью. Жидкость в сосудах устанавливается наодном уровне (на одной отметке). Пусть высота столба жидкости в первом сосуде будет p, а во втором $-q$ (рис. 61). Превышение точки B над точкой A будет равно

$$H = p - q.$$

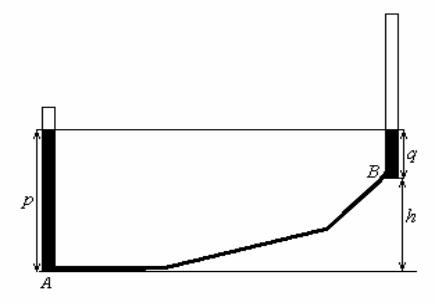


Рис. 61

Точность гидростатического нивелирования зависит от расстояния между сосудами, типа жидкости, диапазона измерения превышения, конструкции отсчетного устройства и других условий. Она может быть очень высокой (5 − 10) мкм при диапазоне измерения высот около 1 см. При расстоянии между сосудами до 500 м превышение можно измерить с ошибкой около 10 мм.

4.4. Тахеометрическая съемка

Тахеометрия – греческое слово и в переводе означает быстрое измерение. Быстрота выполнения тахеометрических работ объясняется получением при одном положении визирной оси трубы 1 – направления, определяемого по буссоли или по лимбу горизонтального круга, 2 – расстояния, измеряемого по дальномеру, и 3 – превышения, отсчитываемого по рейке или вычисленного по измерению вертикального угла.

Тахеометрические работы проводятся при создании съемочного обоснования (прокладкой тахеометрических ходов) и съемке ситуации и рельефа (обычно полярным способом).

План тахеометрической съемки составляется в камеральных условиях. Раздельное выполнение полевых и камеральных работ является ее недостатком, так как возможные промахи в работе при камеральном составлении плана (особенно в изображении рельефа) могут остаться незамеченными. Чтобы избежать этих промахов, во время полевых работ необходимо составлять кроки (план глазомерной съемки).

Тахеометрическую съемку обычно выполняют для составления планов в крупных масштабах. Наиболее целесообразно применять тахеометрию при съемке местности с ясно выраженным рельефом.

При тахеометрической съемке применяют инструменты двух типов: тахеометры-автоматы и круговые тахеометры. Наибольшую производительность труда дают тахеометры-автоматы, имеющие

различные приспособления, при помощи которых можно получить без вычислений горизонтальные проложения линий и отметки точек или превышения между смежными точками.

До появления тахеометров-автоматов в нашей стране наибольшее распространение получил круговой тахеометр, представляющий собой повторительный теодолит с горизонтальным и вертикальным кругами одинаковой точности. При вертикальном круге такого инструмента имется уровень с ценой деления 30-40″. Часто круговой тахеометр называют теодолитом-тахеометром.

Съемка может выполняться одновременно с проложением тахеометрических ходов или после того, как они проложены. Съемка контуров, предметов и рельефа местности выполняется преимущественно полярным способом. В редких случаях (при недоступных объектах) применяют способ угловых засечек. Отметки точек местности определяют тригонометрическим нивелированием. Вертикальные и горизонтальные углы измеряют при одном положении круга инструмента, а полярные расстояния измеряют нитяным дальномером.

Съемочное обоснование для тахеометрической съемки создают, прокладывая теодолитные и тахеометрические ходы, ходы технического нивелирования.

Тахеометрический ход – это комбинация теодолитного и высотного ходов в одном. На каждом пункте измеряют горизонтальный угол, углы наклона на заднюю и переднюю точки, дальномерное расстояние прямо и обратно. Превышения между пунктами вычисляют по формулам тригонометрического нивелирования. Уравнивание тахеометрического хода выполняется отдельно для плановых координат (как в теодолитном ходе) и превышений (как в высотном ходе). Допустимые невязки вычисляются по следующим формулам:

угловая $$f_\beta = 1'\sqrt{n}, \qquad (4.46)$$

абсолютная $$f_s = \Sigma s/400\sqrt{n}, \qquad (4.47)$$

высотная $$f_h = 0.04\sum s/\sqrt{n}. \qquad (4.48)$$

Здесь n − число измеренных углов, $\sum s$ − длина хода в метрах.

Тахеометрическая съемка выполняется с пункта съемочного обоснования в полярной системе координат (рис. 7). Теодолит центрируют над пунктом *A*, горизонтируют, приводят трубу в рабочее положение и ориентируют на следующий пункт *B* съемочного обоснования. Таким образом устанавливается местная система полярных координат с полюсом в пункте *A* и направлением полярной оси (поляры) *AB*. Далее трубу теодолита наводят на рейку, установленную в какой-либо точке местности, и измеряют три величины, определяющие положение точки в плане и по высоте: горизонтальный угол, угол наклона и дальномерное расстояние. Затем вычисляют горизонтальное проложение и превышение.

Точка установки рейки называется пикетом; различают плановые (иногда их называют реечными точками) и высотные пикеты.

Плановые пикеты располагают на контурах и объектах местности.

Высотные пикеты располагаются во всех характерных точках и линиях рельефа: на вершинах гор и холмов, на дне котловин и впадин, по линиям водослива лощин и водораздела хребтов, у бровок лошин и котловин, в точках седловин, на линиях перегиба скатов и т.п. Расстояние между высотными пикетами не должно превышать 20 мм на плане, чтобы при рисовке рельефа было удобно интерполировать горизонтали. Главное условие выбора высотных пикетов – отсутствие перегибов ската между соседними пикетами.

Требования к точности тахеометрической съемки невысоки и поэтому измерения при съемке пикетов выполняются при одном положении круга. Все результаты измерений записывают в журнал тахеометрической съемки, там же вычисляются углы наклона, горизонтальные проложения и превышения. Одновременно с вычислениями в журнале на специальной странице составляют схематический чертеж местности – кроки, на котором показывают все снятые с этой станции пикеты, контуры, направления скатов, формы рельефа и т.п.

В 70-90-х годах, в эпоху бурного развития микроэлектроники в мире, появились электронные тахеометры (устройства, объединяющие в себе теодолит, светодальномер и микроЭВМ) двух типов: с визуальным и электронным отсчетами по кругам.

В тахеометрах первого типа отсчитывание по горизонтальному и вертикальному кругам осуществляется обычным путем (визуально).

Полученные результаты измерения углов вводятся в микропроцессор ручным набором на клавиатуре. Информация об измеренных расстояниях передается автоматически в микроЭВМ и на цифровое табло. К таким тахеометрам относятся: Та5(СССР), ЭОТ2000 (ГДР), SM3, SM4 (ФРГ), HP3810 (США) и др.

В электронных тахеометрах второго типа угломерная часть прибора представляет собой электронный теодолит с автоматическим вводом угловых величин в микроЭВМ и на табло. Такие приборы иностранные фирмы называют Total Stations − универсальные станции.

Современные электронные тахеометры − это геодезические приборы высокой точности, имеющие вполне приемлемую для полевых работ массу (менее 6 кг). Они снабжены съемными и внешними источниками питания и рассчитаны на измерение расстояний в радиусе до 2 км и более. Например, тахеометр совместного предприятия «Геодезические приборы Екатеринбург − ГПЕ» (Россия − Швейцария) TC600E позволяет измерять углы с ошибкой $m_\beta = 5''$ и расстояния $D \leq 1.6$ км с ошибкой $m_D = 3$ *мм* + 3 *мм* ·D *км*.

4.5. Составление плана участка местности

Составленный по результатм теодолитной или тахеометрической съемки план местности должен характеризоваться точностью, детальностью и полнотой.

Детальность плана – это степень подобия изображения на плане контуров и объектов местности. На плане допускается спрямление криволинейных контуров ломаными линиями с ошибкой 0.5 мм в масштабе плана.

Полнота плана определяется конкретными условиями участка местности и его назначением. В зависимости от назначения крупномасштабные планы делятся на топографические и специализированные. На топографические планы наносят все объекты, контуры, рельеф с точностью, отвечающей всем требованиям соответствующих инструкций и нормативных документов. При создании специализированных планов можно изображать не всю ситуацию, а тоько необходимую заказчику, применять нестандартную высоту сечения рельефа и т.п.

Точность плана – это средняя квадратическая ошибка положения объекта или четкого контура относительно ближайших пунктов съемочного обоснования. Она не должна превышать 0.5 мм в масштабе плана; в горной местности этот допуск увеличивается до 0.7 мм.

Нужный масштаб съемки рассчитыватся по допуску 0.5 мм на плане и определяется по формуле:

$$1/M = 0.5мм./\Delta\ell, \qquad (4.49)$$

где $\Delta\ell$ − ошибка взаимного положения объектов в натуре.

План строится в два этапа соответственно двум этапам выполнения съемки:

− наносится геодезическая основа (пункты государственной геодезической сети), пункты геодезического сгущения и пункты съемочного обоснования по их прямоугольным координатам;

− наносится ситуация, то есть наносятся пикеты в местной системе полярных координат и рисуются контуры наземных объектов и горизонталями − рельеф.

Сначала на листе ватмана строят координатную сетку со сторонами квадрата 10 см; координаты углов квадратов подписываются. Ошибка положения вершин квадратов координатной сетки должна быть порядка графической точности – 0.1 мм. Затем по координатам, выбранным из специальных таблиц по номенклатуре листа, строят углы рамок трапеций. Иногда, в зависимости от масштаба съемки, планы строят не в шестиградусных, а в трехградусных зонах.

Все пункты съемочного обоснования, с которых выполняется съемка, и пункты опорных сетей, попадающие на данный лист плана, наносят на план по их координатам. Пикеты наносят в местных полярных системах координат при помощи транспортира и поперечного масштаба или с помощью тахеографа − кругового транспортира с линейкой.. Около каждого пикета подписывают его номер и отметку. Затем, используя кроки, вычерчивают ситуацию в условных знаках и проводят горизонтали. После полевого контроля план вычерчивается в туши в один или несколько цветов, наносят все подписи, оформляют рамки и зарамочное пространство,

заполняют формуляр − бланк, в который вносятся необходимые сведения о снимаемом объекте.

4.6. Мензульная съемка

Основным методом картографирования территрии нашей страны является аэрофототопографическая съемка. Она применяется при съемке в масштабах 1 : 5 000 и мельче. Однако бывают случаи, когда такую съемку произвести не представляется возможным; при съемке небольших по площади участков местности проводить аэрофотосъемку экономически нецелесообразно. В этом случае проводится мензульная съемка.

При мензульной съемке горизонтальные углы не измеряются (как это делается при теодолитной и тахеометрической съемках), а строятся на плане непосредственно в поле. Вследствие указанной особенности мензульная съемка еще называется угломначертательной. Результаты съемки объектов местности последовательно наносятся на план непосредственно в поле на каждой съемочной станции. Это обстоятельство выгодно отличает мензульную съемку от тахеометрической: при мензульной съемке непрерывно производится сопоставление соответствующих участков местности и плана, что в большей мере гарантирует от возможных промахов.

Съемочное обоснование для мензульной съемки создают на основе пунктов опорной геодезической сети. Для построения съемочного обоснования также применяются теодолитные и тахеометрические ходы, триангуляционные построения, различные засечки, мензульные ходы и геометрическая сеть. Первые четыре вида образуют аналитическое съемочное обоснование, потому что координаты пунктов получают при уравнивании конкретного геодезического построения. Последние два вида относятся к графическому съемочному обоснованию.

а) Мензульный ход. Мензульный ход прокладывается между пунктами аналитического обоснования и имеет ограниченную длину, зависящую от масштаба съемки (например, при масштабе 1:2000 он должен быть не более 500 м). Расстояние между пунктами измеряют нитяным дальномером в прямом и обратном

направлениях. Допустимые расхождения между этими измерениями не должны превышать 1/200 от измеряемого расстояния.

Поскольку мензульный ход прокладывается между известными пунктами, которые на планшете уже зафиксированы, может появиться невязка хода (рис. 62).

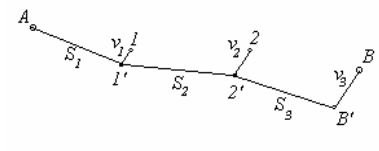


Рис. 62

Допустимая линейная невязка мензульного хода на планшете равна 0.8 мм; она распределяется на все пункты хода методом праллельных линий: параллельно линии невязки хода *BB'* прочерчивают линии в пунктах мензульного хода 1', 2' и т. д. Затем на этих линиях откладывают отрезки

$$v_1 = -S_1 \cdot f_s/\Sigma S; \quad v_2 = -(S_1 + S_2) \cdot f_s/\Sigma S, \text{ и т. д.},$$

где S_1, S_2 – длины сторон мензульного хода в м;

f_s – линейная невязка хода на планшете в мм;

ΣS – длина мензульного хода в м;

v_1 , v_2 – поправки к положению пунктов хода на планшете в мм.

На концах отложенных отрезков накалываются точки, которые и будут являться уравненными положениями пунктов мензульного хода.

Превышения между пунктами мензульного хода определяют кипрегелем в прямом и обратном направлениях методом тригонометрического нивелирования. Допустимая высотная невязка мензульного хода подсчитывается по формуле:

$$f_{h,доп} = 0.04\Sigma s/\sqrt{n},$$

где n – число пунктов мензульного хода.

Невязка распределяется в превышения между пунктами хода с обратным знаком пропорционально длинам сторон.

б) Геометрическая сеть. Если на местности имеются три пункта с известными координатами, то при мензульной съемке в масштабе 1:5000 и мельче графическое съемочное обоснование разрешается создавать в виде геометрической сети. Применяя прямую угловую

засечку, с трех известных пунктов определяют графически положение одного пункта. Затем с любых трех имеющихся на планшете пунктов прямой угловой засечкой определяют положение следующего пункта и так далее, пока не будет определено положение всех пунктов сети.

Отметки пунктов геометрической сети получают из технического нивелирования или высотных ходов.

в) Производство мензульной съемки. Мензульная съемка производится при помощи мензулы и кипрегеля. Мензула представляет собой своеобразный столик. На мензульную доску наклеивают лист высококачественной чертежной бумаги; в этом виде она называется планшетом. Кипрегель представляет собой верхнюю часть тахеометра. Его основными частями являются длинная линейка (алидада), на которой с помощью колонки укреплены зрительная труба и вертикальный угломерный круг. На линейке имеется цилиндрический уровень. Труба и вертикальный круг имеют общую ось вращения, которая при правильной установке кипрегеля занимает горизонтальное положение; визирная ось трубы при вращении последней образует отвесную коллимационную плоскость.

Принадлежностями мензульного комплекта являются центрировочная вилка и буссоль (или ориентир-буссоль), с помощью которых мензула центрируется над опорной точкой и ориентируется с учетом магнитного склонения.

Над опорной точкой A, закрепленной на местности, центрируют точку a съемочной сети, нанесенной на планшета (рис.63). Планшет устанавливают в горизонтальное положение и ориентируют по линии AB местности. Перед съемкой пикетов измеряют высоту инструмента i и отмечают ее на рейке. Затем исполнитель намечает места пикетов и дает задание речнику − в каком порядке их обходить. Плановые пикеты располагаются на изгибах контуров, у канав, углов изгородей, дорог, пересечениях и ответвлениях дорог, у отдельных объектов и т.д. Высотные пикеты располагают на характерных точках и линиях рельефа, на перегибах скатов.

Наводят трубу кипрегеля на точку C местности и проводят карандашом по линейке кипрегеля направление на точку C. Угол bac на планшете – это горизонтальный угол $B'A'C'$. Здесь плоскость планшета выполняет роль лимба с центром в точке a, а отсчет по

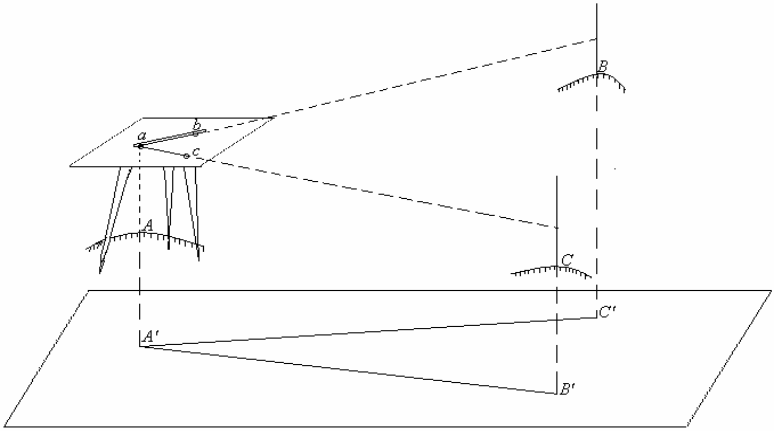


Рис. 63

лимбу заменяется прочерчиванием наблюдаемого направления. Положение точки *C* определяется измерением дальномером кипрегеля горизонтального проложения линии *AC*, которое откладывается от точки *a* на прочерченном направлении в масштабе съемки. Затем вычисляют превышение точки *C* относительно точки *A*, вычисляют отметку точки *C* и подписывают ее на плане. Точно так же определяется положение и других точек местности.

На каждой станции после полного набора пикетов проводят контурные линии, наносят условные знаки объектов местности, проводят горизонтали и только после этого переходят на другой пункт съемочного обоснования. Ежедневно составляют кальку высот, на которую наносят все высотные пикеты, и кальку контуров, содержанием которой являются копии снимаемых объектов и отдельных предметов местности.

Если участок съемки расположен на нескольких планшетах, то выполняют их сводку по рамкам. Если приложить один планшет к другому по общей рамке, то горизонтали и контуры должны совпадать с точностью 0.2−0.5 мм (в зависимсти от категории трудности местности). При недопустимом расхождении все разногласия устраняются на местности при повторной съемке.

5. ДИСТАНЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХОСТИ

Дистанционные методы изучения земной поверхности (ДМИЗП) основаны на измерении параметров земной поверхности на расстоянии с передачей результатов по индивидуальной линии связи. Такие измерения выполняются, как правило, с летающих аппаратов.

Техническая дисциплина, имеющая своей задачей определение вида и размеров какого-либо объекта путем изучения и измерения не самого объекта, а его фотографического изображения, называется фотограмметрией. Наибольшее применение фотограмметрия нашла в топографии, где объектом изучения и измерения является местность. Здесь задача фотограмметрии состоит в том, чтобы полевые измерения, необходимые для создания топографической карты, заменить измерениями аэрофотоснимка в камеральных условиях при помощи специальных фотограмметрических приборов.

К ДМИЗП относятся аэрофотосъемка и космические съемки различного назначения.

5.1. Аэрофотосъемка

Аэрофотосъемка – фотографирование местности с самолета или какого-либо другого летательного аппарата. Аэрофотосъемка производится для создания топографических карт по аэрофотоснимкам, изучения и учета лесных и земельных фондов, проектирования инженерных сооружений, при выполнении геолого-разведочных работ, геофизических съемок и для других народно-хозяйственных целей. В войсках аэрофотосъемка ведется в целях разведки территории противника, его боевой техники и инженерных сооружений. Аэрофотосъемка выполняется специальными аэрофотоаппартами (АФА) и в зависимости от характера залета подразделяется на одинарную, маршрутную и площадную, в зависимости от вида аэрофотоснимков – на плановую и перспективную.

Одинарная аэрофотосъемка применяется при фотографировании отдельных объектов или группы их, когда они могут быть засняты на одном или немногих (2-3) снимках и нет

надобности в стереоскопическом (объемном) рассмотрении сфотографированных объектов.

Маршрутная аэрофотосъемка – фотографирование местности вдоль некоторого направления (маршрута). Выполняется с целью разведки дорог, рек, берегов крупных водоемов и других протяженных объектов. Ширина снимаемой полосы и число снимков, необходимое для аэрофотосъемки, рассчитывается по особым формулам с учетом масштаба аэрофотосъемки.

Площадная аэрофотосъемка – съемка участка земной поверхности, превышающего по ширине площадь, фотографируемую одним маршрутом. При аэрофотосъемке площади прокладывается ряд параллельных между собой маршрутов с соблюдением заданного перекрытия между ними. Расстояние между маршрутами, количество маршрутов, общее количество аэрофотоснимков при заданной площади рассчитываются по соответствующим формулам.

Плановая аэрофотосъемка – съемка, при которой АФА устанавливается в самолете так, чтобы его оптическая ось во время фотографирования занимала отвесное положение; отклонение от такого положения на некоторый угол α происходит вследствие неизбежного колебания самолета в воздухе. Величина угла α при плановой аэрофотосъемке обычно меньше 3° (в среднем около 1.5°), а с применением гидростабилизирующей установки она уменьшается до 30″. Приближенно о величине этого угла можно судить по положению пузырька уровня, фиксируемому на аэрофотоснимке. Продольное перекрытие аэрофотоснимков при выполнении плановой аэрофотосъемки должно быть не менее 55%, поперечное (в зависимости от рельефа местности и способа фотограмметрической обработки аэрофотоснимков) – 30-40%.

Перспективная аэрофотосъемка – съемка, при которой АФА установлен в самолете так, что его оптическая ось наклонена от отвесного положения на некоторый постоянный угол α. Получаемые при этом снимки называются перспективными. Перспективная аэрофотосъемка широко применяется при общем обзоре местности, т. к. с равных высот и одинаковыми АФА фотографируется площадь большая, чем при площадной аэрофотосъемке. При этом, нужные объекты фотографируются с некоторого расстояния, не пролетая непосредственно над ними, для чего применяется качающаяся

установка, позволяющая получать одновременно и плановые, и перспективные снимки.

5.1.1. Аэрофотоснимок

Первичной продукцией аэрофотосъемки являются плановые аэрофотоснимки местности, по которым путем последующей специальной обработки создаются топографические карты. разных масштабов (таблица 5.1.).

Таблица 5.1

Таблица масштабов аэрофотосъемки

Масштаб создаваемой съемки	Масштаб аэрофотосъемки
1 : 10 000	1 : 10 000 – 1 : 15 000
1 : 25 000	1 : 20 000 – 1 : 35 000
1 : 50 000	1 : 35 000 − 1 : 60 000
1 : 100 000	1 : 60 000 − 1 : 120 000

По сравнению с топографической картой аэрофотоснимок имеет ряд преимуществ. На нем изображаются детали местности; на топографической карте той же местности некоторые из них опускают (или обощают). В связи с этим на содержание карты сказываются субъективные особенности исполнителя работ (съемщика), в то время как аэрофотоснимок дает более полное и объективное представление о местности. Свежий аэрофотоснимок представляет самые последние сведения о местности (его можно изготовить через несколько часов после съемки); данные, взятые с карты, могут быть в той или иной мере устаревшими. Вместе с тем по сравнению с картой аэрофотоснимок имеет и ряд недостатков. На нем отсутствуют некоторые сведения, имеющиеся на карте; его трудно читать, особенно в части, относящейся к рельефу местности; масштаб снимка в разных его частях неодинаковый (не говоря уже о масштабах разных снимков), поэтому измерения на снимке более сложны. Аэрофотоснимки являются хорошим дополнением к топографической карте. По ним изучают местность при различных рекогносцировочных и проектно-изыскательских работах. Большое

значение аэрофотоснимок имеет для обеспечения боевых действий войск.

Аэрофотоснимок является центральной проекцией участка местости. Лучи от точек местности *ABCDE* проходят через оптический центр объектива *S*, являющемся центром проекции; изображение *abcde* получается на светочувствительной пленке, являющейся плоскостью проекции. Известно, что план является ортогональной проекцией местности. Поэтому, если снимаемый участок и пленка горизонтальны, а оптическая ось АФА занимает отвесное положение, то аэрофотоснимок можно считать планом местности (рис. 64, а). Но в большинстве случаев аэрофотоснимок не является планом местности (рис. 64, б).

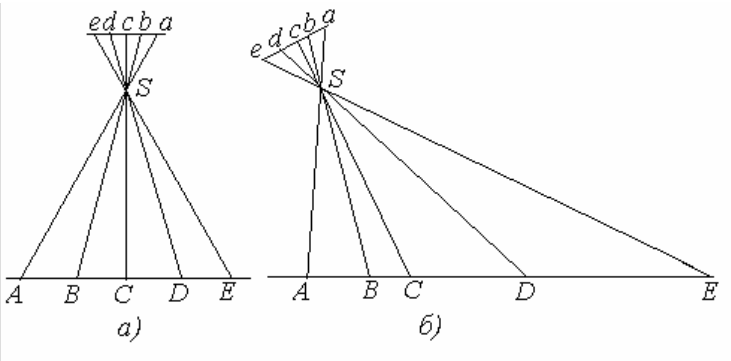


Рис. 64

Масштабом аэрофотоснимка называется отношение длины линии на аэрофотоснимке к длине горизонтального проложения соответствующей линии на мастности. Масштаб наклонного аэрофотоснимка не является постоянной величиной: равным между собой по длине линиям местности соответствуют линии различной длины на аэрофотоснимке. Вследствие неравенства масштаба наклонного аэрофотоснимка по различным направлениям элементы местности изображаются на нем в искаженном виде.

Для определения масштаба горизонтального аэрофотоснимка можно вывести формулу, рассмотрев подобные треугольники *SCA* и *sca*:

$$ca/CA = cs/CS \text{ или } ca/CA = f/H = 1/M,$$

где $f = Sc$ – фокусное расстояние объектива АФА,

$H = SC$ – высота фотографирования,

M – знаменатель численного масштаба аэрофотоснимка.

Если высота фотографирования неизвестна, то величину M определяют измерением соответствующей линии на снимке и . местности. Поскольку масштаб планового аэрофотоснимка более постоянен в центральной его части, а в других его частях и в различных направлениях неодинаков, то масштаб аэрофотоснимка принято определять по нескольким отрезкам, расположенным по возможности ближе к центру и имеющим различные направления. За окончательный результат берется среднее из полученных значений.

Ориентирование аэрофотоснимка производится по линиям, имеющимся на снимке и на местности, или по воображаемым линиям, соединяющим ясно выраженные предметы (точки контуров). После того, как аэрофотоснимок ориентирован по линиям местности, можно установить на нем буссоль, прочертить линию, параллельную магнитной стрелке. Эта линия является направлением магнитного меридиана.

Два аэрофотоснимка, полученные при фотографировании местности с двух точек фотографирования и имеющие между собой перекрытие не менее 55%, составляют стереоскопическую пару (стереопару). При рассматривании надлежащим образом ориентированной стереопары в стереоскопический прибор (стереоскоп) возникает рельефное изображение местности (стереоскопическая модель), сфотографированной на перекрывающихся частях аэрофотоснимка. Метод, основанный на использовании стереоскопического зрения, то есть способности глаза наблюдателя ощущать объемное пространство, называется стереоскопической съемкой. Этот метод используется для определения высот точек земной поверхности и рисовки горизонталей при помощи стереоприборов в камеральных условиях.

5.1.2. Аэрофототопографическая съемка

Аэрофототопографическая съемка – вид топографической съемки, основанный на использовании аэрофотоснимков.

Аэрофотосъемка производится двумя методами: комбинированным и стереотопографическим.

Комбинированный метод представляет собой сочетание фотограмметрической обработки аэрофотоснимков с мензульной съемкой. Составляется фотоплан, а затем на репродукции с него снимают в поле рельеф методами мензульной съемки. Комбинированный метод обычно применяется для съемки равнинных районов со слабо выраженным рельефом.

Создание топографической карты комбинированным методом состоит из следующих этапов:

1 – летносъемочные и фотолабораторные работы;

2 – построение геодезической основы, плановая привязка аэрофотоснимков;

3 – развитие фототриангуляции;

4 – трансформирование аэрофотоснимков, монтаж фотосхем;

5 – сгущение высотного съемочного обоснования, съемка рельефа на фотопланах и дешифрирование контуров;

6 – вычерчивание и оформление оригинала карты.

Фототриангуляция − метод определения опорных точек в камеральных условиях при помощи фотограмметрических приборов или графических построений. Различают пространственную фототриангуляцию, при которой определяются все три координаты точек, и плановую (плоскостную), если определяется только их плановое положение.

Трансформирование аэрофотоснимков − преобразование плановых или перспективных аэрофотоснимков в горизонтальные. В процесс трансформирования входит также приведение аэрофотоснимков к заданному масштабу и уменьшению искажений, обусловленных рельефом местости.

5.2. Космическая съемка

С появлением искусственных спутников Земли (ИСЗ) геодезия получила новые пути и методы решения ее основной научной проблемы, связанной с определение фигуры, размеров и анешнего гравитационного поля Земли. Открылись новые методические возможности и для решения ее инженерно-технических задач. Появление ИСЗ укрепило старые и возродило новые связи геодезии

с геофизикой, астрономией, небесной механикой, радиоэлектроникой. На стыке этих наук возникла новая научная дисциплина, получившая название спутниковой геодезии, которая находится в состоянии непрерывного развития.

5.2.1. Предмет и задачи спутниковой геодезии

Предмет изучения и задачи, решаемые спутниковой геодезиией, в общем совпадают с предметом и задачами высшей геодезии. Как и высшая геодезия, спутниковая геодезия изучает фигуру, размеры и внешнее гравитационное поле Земли, а также теорию и методы решения этой научной проблемы. Спутниковая геодезия решает эту проблему при помощи наблюдений за положением и движением преимущественно искусственных небесных тел в околоземном космическом пространстве.

Спутниковая геодезия решает ряд задач, которые имеют большое научное и практическое значение. Все эти задачи по характеру и методу их решения делятся на геометрические и геодинамические.

Задачами спутниковой геодезии геометрического характера являются:

− построение сети опорных геодезических пунктов с определением их положения в единой системе пространственных координат, отнесенных к центру масс и оси вращения Земли;

− определение взаимного положения начал и ориентирования осей различных систем координат, отнесенных к различным референц-эллипсоидам;

− определение положения отдельных стационарных пунктов и подвижных целей в избранной системе координат.

При решении этих задач спутник служит лишь промежуточной визирной целью, наблюдаемый синхронно с двух или более наземных станций.

Динамическими задачами являются:

− определение пространственного положения спутника и текущих параметров его орбиты;

− изучение различных возмущений в орбитальном движении спутника;

− определение фигуры, размеров и внешнего гравитационного поля Земли как планеты в целом.

Решение этих задач требует наблюдений спутника в течение довольно длительного времени.

Выполняемые наблюдения межпланетных станций и дальних космических аппаратов радиотехническими средствами могут решать очень важные задачи, представляющие большой интерес для геодезии, астрономии, геофизики. К числу таких задач можно отнести:

− определение геоцентрических координат станций наблюдения;

− изучение движений небесных полюсов, то есть колебаний Земли на своей оси вращения;

− определение отношения массы планеты к массе Земли или Солнца.

Наблюдения ИСЗ позволяют решать проблемы высшей геодезии на основании принципиально иных измерительных данных и методов, чем это вытекает из классических принципов геодезии.

5.2.2. Методы наблюдений спутников

В настоящее время методы наблюдений ИСЗ принято делить на оптические и радиотехнические – в зависимости от диапазона электомагнитных колебаний, в котором выполняются измерения.

Оптические методы определения направления на спутник заключаются в измерении зенитного расстояния и азимута спутника кинотеодолитами или в определении этого направления в заданной звездами системе координат путем фотографирования на фоне звезд. К оптическим методам относится также метод измерения дальности спутника лазерными дальномерами.

К радиотехническим методам наблюдения относятся методы определения направления на ИСЗ короткобазисными интерферометрами, измерения дальности спутника фазовыми и импульсными радиотехническими системами, доплеровские, − основанные на использовании доплеровского эффекта сдвига частоты и дающие информацию либо о радиальной скорости спутника относительно станции наблюдения и ее изменении (дифференциальные допплеровские методы), либо о разности

дальностей до двух положений спутника от станции (интегральные доплеровские методы). Важным достоинством всех радиотехнических методов является их всепогодность и возможность проведения наблюдений в любое время суток. нические методы измерения дальности.

5.2.3. Идея решения геометрических задач спутниковой геодезии

Геометрические условия видимости определяются взаимным расположением спутника, пунктов наблюдения и Солнца. Рассмотрим эти условия, не принимая во внимание освещенности его Солнцем. Чтобы избежать больших ошибок из-за влияния рефракции, желательно наблюдать спутник на высоте α_c над горизонтом наблюдения не менее 10°. Угол χ между направлениями из центра Земли O на спутник S и на наблюдателя N (рис. 65) можно определить по формуле

$$cos(\alpha_c + \chi) = Hcosh_c/(R + H), \qquad (5.1)$$

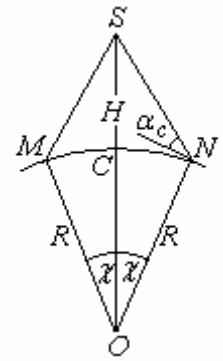


Рис. 65

где R – радиус Земли, H – высота ИСЗ над поверхностью Земли. Одновременная видимость спутника на данное положение с нескольких пунктов возможна, если эти пункты попадают на или внутрь окружности радиуса $MC = R\chi/\rho$, центром которой является подспутниковая точка C данного положения спутника. Практически одновременная геометрическая видимость спутника на участке орбиты обеспечена, если пункты наблюдений попадают на или внутрь области перекрытия кругов радиуса $R\chi/\rho$ с центрами в начальной и конечной подспутниковых точках наблюденного участка орбиты.

Ознакомимся с идеей определения положения стационарных пунктов в избранной системе координат.

Пространственные построения, в основе которых лежат измерения топоцентрических векторов наземного пункта до спутника, называются спутниковой векторной сетью.

Введем геоцентрическую правую прямоугольную систему координат *oxyz* с началом *o* в центре масс Земли. Ось *z* направлена к северу, к принятому среднему полюсу, ось *x* расположена в воображаемой плоскости, которая является началом отсчета астрономических долгот (рис. 66). Пусть на поверхности Земли имеется пункт $M(x_M, y_M, z_M)$, определяемый геоцентрическим вектором R, и спутник $S(x_s, y_s, z_s)$ в пространстве, определяемый геоцентрическим вектором r_S (геоцентрическое расстояние до ИСЗ), α_S и δ_S − геоцентрические экваториальные координаты спутника (прямое восхождение и склонение). Положение спутника относительно пункта M определяется топоцентрическим вектором (расстоянием) ρ, а α и δ – соответственно прямое восхождение и склонение спутника.

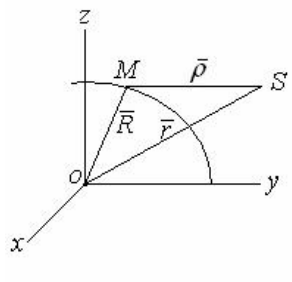


Рис. 66

Легко видеть, что

$$\overline{R} = \overline{r_S} - \overline{\rho}. \qquad (5.2)$$

Векторное соотношение (5.2) играет роль основного уравнения в спутниковой геодезии. В системе координат *oxyz* это уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} x_M &= f_1(r_S, \alpha_S, \delta_S, \rho, \alpha, \delta), \\ y_M &= f_2(r_S, \alpha_S, \delta_S, \rho, \alpha, \delta), \\ z_M &= f_3(r_S, \delta_S, \delta), \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Приближенные значения величин, входящих в уравнение (5.2), заранее известны или их можно найти. Составив уравнения, связывающие поправки к принятым приближенным координатам пунктов земной поверхности и спутника, можно путем сложной обработки определить координаты определяемых пунктов.

В спутниковых навигационных системах (СНС) первого поколения для определения местоположения используетс эффект Доплера. Одно наблюдение спутника позволяет написать

уравнение одной линии положения, имеющей форму либо гиперболы(доплеровский дифференциальный метод), либо более сложной кривой изодопы (доплеровский интегральный метод). При *n* наблюдениях положение наблюдателя получается в одной из точек пересечения *n* соответствующих гипербол или изодоп.

В период с 1987 по 1993 год для повышения точности и однородности государственной геодезической сети СССР создана доплеровская геодезическая сеть из 136 пунктов, равномерно расположенных по всей территории.

В СНС второго поколения измеряются дальности, т. е. расстояния от определяемой точки до спутников, координаты которых известны на любой момент времени. Геометрическая идея такого определения заключается в нахождении положения точки из линейной пространственной засечки; положение точки фиксируется либо тремя прямоугольными координатами *X*, *Y*, *Z*, либо геодезическими координатами на эллипсоиде (широтой *B* и долготой *L*) и высотой *H* над поверхностью эллипсоида.

При обработке наблюдений спутников приходится учитывать параметр «время», поэтому для однозначного решения засечки требуется набюдать четыре спутника, расположенных равномерно по азимуту (через 90˚) и под углом наклона $\alpha_c = 40^\circ - 60^\circ$.

Существуют абсолютный и относительный способы определения координатс помощью СНС. При абсолютном способе получают координаты пункта установки антенны в принятой системе координат; при относительном способе комплект аппаратуры распределяется на два пункта, один из которых имеет известные координаты, и из наблюдений определяют приращения координат между этими пунктами.

Точность получения величин зависит от способа определения координат, от типа аппаратуры и от характера кода сигналов спутника. Так, навигационной аппаратурой измерения абсолютным способом выполнятся с погрешностью 30 − 100 м (пониженной точности) и 1 − 30 м (повышенной точности). Относительные измерения при выполнении топографических работ характеризуются погрешностью 0.1 − 5.0 м и геодезических − (5 − 10)мм + $S \cdot 10^{-6}$, где S − расстояние между геодезическими пунктами.

5.2.4. Построение новой геодезической основы

До 1968 г. исследования в области космической геодезии проводились в нашей стране Центральным научно-исследовательским инститктом геодезии, аэрофотосъемки и картографии (ЦННИИГАиК) в основном по очень важному направлению: определение параметров гравитационного поля Земли (ГПЗ) по наземным и спутниковым измерениям. С создания в 1968 г. лаборатории спутниковой геодезии под руководством профессора Изотова А.А. были начаты исследования и практические работы, связанные с построения геодезических сетей по наблюдениям спутников и других космических объектов. Точность определения положения пунктов наблюдений фотографическим методом достигала 3-5 м.

С конца 1970-х гг. начались работы по геодезическому использованию доплеровских наблюдений спутников навигационной системой TRANSIT. Как и при использовании фотографических наблюдений, проводились совместные работы по созданию объединенной доплеровской геодезической сети (ДГС), охватывающей территории Болгарии, Германской демократической республики (ГДР), Венгрии, Польши, Чехословакии. В результате была создана сеть, включающая 160 пунктов при расстояниях между ними 300-1000 км. Эти пункты были включены в совместное уравнивание основных сетей единой Государственной геодезической сети (ГГС) СССР. Точность определения положения пунктов ДГС в единой системе по каждой из пространственных координат соответствовала в среднем 0.5 м.

Начиная с средины 1980-х гг. одним из приоритетных направлений исследований ЦНИИГАиК стало геодезическое использование спутниковых систем GPS и ГЛОНАСС и их последующих улучшенных аналогов, ставших основой геодезических технологий широкого спектра применений в большинстве производственных и научно-технических отраслей, требующих геодезического обеспечения. Поэтому в ЦНИИГАиК были разработаны Концепция перехода топографо-геодезического производства на автономные спутниковые методы координатных определений и Федеральная целевая подпрограмма по

формированию государственной системы геодезического обеспечения направлений на реализацию этой концепции.

За последние годы достигнуты большие успехи в развитии и применении спутниковых глобальных систем позиционирования (GPS). Высокая точность определения координат позволяет использовать их при решении широкого спектра геодезических задач − от определения положения пунктов новой геодезической основы до геодезического обоснования проектно-изыскательских работ и строительства различных народнохозяйственных объектов. Сравнение GPS-методов с традиционными показали высокую экономическую эффективность первых: на выполнение полевых GPS-измерений было затрачено человеко-часов в 8 раз меньше, а на организационные и камеральные работы – в 6 раз.

Преимущества GPS-метода перед традиционными:

− отсутствие необходимости прямой видимости между пунктами;

− более высока точность определения относительных координат;

− получение результатов в единой системе координат;

− возможность получения трехмерного решения (планово-высотного);

− высокая степень автоматизации как полевых, так и камеральных работ; повышение безопасности выполнения работ;

− экономическая целесообразность.

Все вышеизложенное позволяет сделать вывод о целесообразности применения GPS-аппаратуры не только для построения опорных геодезических сетей, но и при инженерно-геодезических работах, где эффект может быть еще выше. Традиционные технологии могут быть эффективнее, чем GPS-методы при проведении работ в условиях плотной городской многоэтажной застройки и на других объектах, где прием спутниковых сигналов затруднен или невозможен.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Контрольные вопросы

1. Общие сведения о геодезии

1) Предмет и задачи геодезии. 2) Форма и размеры Земли; идея градусных измерений. Понятие о геоиде, референц-эллипсоиде. 3) Что означает термин «геодезические элементы» и как они определяются? 4) Определение положения точки на земной поверхности. Системы координат, применяемые в геодезии.

2. План и карта

1) Влияние кривизны уровенной поверхности на определение планового и высотного положения пункта. 2) Что такое план, карта, профиль? 3) Виды масштабов. 4) Точность масштаба. 5) Картографические проекции, их виды. 6) Конформная поперечно-цилиндрическая проекция Гаусса − Крюгера. 7) Зональная система координат. 8) Приведенные ординаты Гаусса. 9) Сближение меридианов. Гауссово сближение меридианов. 10) Ориентирование линий на карте. 11) Связь дирекционных углов и азимутов.. 12) Номенклатура карт. 13) Зоны перекрытия. 14) Изображение рельефа на плане (карте). 15) Какие задачи решаются по горизонталям плана (карты)? 16) Способы определения площади участков. 17) Графический метод определения площади участка по карте: возможности использования квадратной и линейной палеток. 18) Аналитический метод определения площади. 19) Вычисление площади многоугольника по координатам его вершин. 20) Теория полярного планиметра. 21) Определение постоянных планиметра. Их геометрический смысл. 22) Редуцирование площадей.

3. Основы теории ошибок измерений

1) Виды измерений. 2) Виды ошибок измерений. 3) Свойства случайных ошибок. 4) Арифметическое среднее и его свойства.
5) Средняя квадратическая ошибка функции линейного вида.
6) Средняя квадратическая ошибка среднего арифметического.

7) Свойства вероятнейших поправок (ошибок). 8) Выражение средней квадратической ошибки через вероятнейшие поправки (ошибки). 9) Вычисление средней квадратической ошибки одного измерения по разностям двойных равноточных измерений: а) без учета систематической ошибки, б) с учетом систематической ошибки. 10) Определение веса измерения. 11) Средняя квадратическая ошибка единицы веса. 12) Средняя квадратическая ошибка общей арифметической средины.

4. Топографические съемки

1) Общие сведения о съемках. 2) Сущность тнодолитной съемки. 3) Рекогносцировка и обозначение точек теодолитного хода на местности. 4) Вешение и измерение линий мерной лентой. 5) Устройство теодолита технической точности. 6) Поверки теодолитов Т30 и 2Т30. 7) Измерение углов теодолитного хода. 8) Прямая геодезическая задача. 9) Обратная геодезическая задача. 10) Уравнивание углов разомкнутого теодолитного хода. 11) Уравнивание углов замкнутого теодолитного хода. 12) Вычисление дирекционных углов жода. 13) Вычисление и уравнивание приращений координат замкнутого хода; контроль вычислений. 14) Вычисление и уравнивание приращений координат разомкнутого хода; контроль вычислений. 15) Вычисление координат теодолитного хода; контроль вычислений. 16) Измерение превышений: виды нивелирования. 17) Идея геометрического нивелирования. 18) Влияние внешних условий на результаты нивелирования. 19) Устройство и поверки нивелира с уровнем. 20) Поверки реек. 21) Порядок работы на станции при нивелировании хода. 22) Математическая обработка нивелирного хода. 23) Сущность тахеометрической съемки. 24) Тригонометрическое нивелирование. 25) Порядок работ на станции и ведение журнала при выполнении тахеометрической съемки. 26) Составление плана тахеометрической съемки. 27) Что общее между тахеометрической и мензульной съемками и чем они отличаются одна от другой.

5. Дистанционные методы изучения земной поверхности

1) Аэрофотосъемка: виды аэрофотосъемки и их назначение. 2) Для чего используются аэрофотоснимки? 3) Масштаб аэрофотоснимка. 4) Отличие комбинированного метода аэрофотосъемки от стереотопографического.5) Предмет и задачи спутниковой геодезии. 6) Идея решения геометрических задач спутниковой геодезии. 7) В чем заключается преимущество GPS-технологий перед традиционными методами геодезии?

БИБЛИОГРФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Рекомендуемая литература

1. **Баканова В. В**. Геодезия. М.: Недра, 1980. 456 с.
2. **Гиршберг М. А**. Геодезия. Ч. 1. М.: Недра, 1968. 384 с.
3. **Дьяков Б. Н.** Геодезия. Общий курс: учеб. пособие для вузов. − Новосибирск: Изд. НГУ, 1993. − 169 с.
4. **Дьяков Б. Н**. Геодезия. Общий курс. Новосибирск: СГГА, 1997. 173 с.
5. Инженерная геодезия. Учеб. для вузов / **Клюшин Е. Б., Киселев М. И., Михелев Д. Ш., Фельдман Е. Д.:** Под ред. **Михелева Д. Ш.** − 2-е изд. испр. − М.: Высш. шк., 2001. − 464 с.: ил.
6. Инструкция по топосъемкам масштабов 1 : 5000 – 1 : 500 − М.: Недра, 1973. с.
7. **Кузнецов П. Н**. Геодезия. Ч. 1. М.: , 2002. с.
8. **Маслов А. В.** и др. Геодезия / **Маслов А. В., Ларченко Е. Г., Гордеев А. В., Александров Н. Н**. Ч. 1. – М.: Издательство геодезической литературы, 1958. 512 с.
9. **Маслов А. В**. Геодезия. Ч. 1. М.: Недра, 1980.
10. **Маслов А. В., Юнусов А. Г.Ю Горохов Г. И.** Геодезические работы при землеустройстве: Учеб. пособие для вузов. − 2-е изд., перераб. и доп. − М.: Недра, 1990. − 215 с.: ил.
11. **Маслов А. В., Александров Н. Н., Ларченко Е. Г.** и др. Геодезия. Ч. 1. М.: Недра, 1996. с.
12. Практикум по геодезии / Под ред. **Бакановой В.В.** М.: Недра, 1983. 456 с.
13. Условные знаки для топопланов масштабов 1 : 5000 – 1 : 500. М.: Недра, 1973. с
14. **Чеботарев А. С**. Геодезия. Ч. 1. – М.: Издательство геодезической литературы, 1955. 628 с.

ТОПОГРАФИЯ С ОСНОВАМИ ГЕОДЕЗИИ

Автор

Колмогоров Вячеслав Георгиевич, д-р техн. наук, доцент каф. геофизики НГУ